ハンズオンで学ぶ 波浪中船体応答

Ver. 1.2　2023/12/07

海上技術安全研究所 松井貞興

目次

1. はじめに 3
2. 実際に計算してみよう 4
2.1. 準備 4
2.2. 船体情報の入力 4
2.3. 時系列およびアニメーションの出力 9
2.4. 応答関数の出力 15
2.5. 短期・長期予測計算 20
3. 波浪中船体運動の応答関数の特徴を捉える 23
3.1. Heave 運動 23
3.2. Pitch 運動 26
3.3. Roll 運動 29
3.4. Surge, sway, yaw 運動 34
3.5. 運動加速度 35
3.6. 船体固定座標系の加速度 35
4. 波浪中ハルガーダ断面力の応答関数の特徴を捉える 37
4.1. 力のつり合いとハルガーダ断面力 37
4.2. 波浪中のハルガーダ断面力の考え方 38
4.3. 垂直曲げモーメント 39
4.4. 垂直せん断力 41
4.5. 捩りモーメント 44
5. 短期・長期予測を理解する 48
5.1. 応答関数の真の役割 48
5.2. なぜ短期予測と長期予測の 2 段階に分けるのか 49
5.3. 短期予測①：波スペクトル 49
5.4. 短期予測②：応答スペクトル 52
5.5. 短期予測③：標準偏差、レイリー分布、1/n 最大期待値 53
5.6. 長期予測①：波浪発現頻度表 55
5.7. 長期予測②：長期予測値、最悪短期海象 55
6. 付録 58
6.1. 振動論の基礎 58
6.2. 流体力係数と波浪強制力 60
6.3. 運動モード間の連成 61
6.4. 線形とは何か 62

6.4.1. 線形性 62
6.4.2. 物理モデルの線形化 64
6.4.3. 波浪中船体応答に現れる非線形影響と線形近似 65

1. はじめに

海に浮かぶ船体は、波から力を受け、揺れ、さらにそれが波を造り、さらにその波が…といった流体との相互作用現象の中にある。この現象を扱う分野は耐航性(seakeeping)と呼ばれ、同理論に基づくストリップ法やパネル法等の数値解析手法は、船舶の設計に活用されている。

しかしこの耐航性理論、海面を有する流体の力学（自由表面流体力学）を理論的に扱うにあたり少々高度な数学を必要とするため、学習負荷の高い、とっつきにくい学問としてしばしば敬遠される傾向にある。そのため船舶の設計者でも「何だかよくわからない」、「触れたこともないし触れたくもない」といった感想を抱いている人も少なくないのが実情である。しかし、船体の波浪中の船体応答は運動・推進性能、構造設計など幅広い分野に影響する船体にとって最も基本的な物理と言っても過言ではなく、船舶海洋分野に身を置く人間にとって波浪中船体応答がどういうものか知っておくことは決して無駄にはならないだろう。

上で耐航性理論は学習負荷が高いと述べたが、実は、それは自由表面流体力学の数理を真っ向から扱おうとする場合に限る。一方、多くの人、特に実務者にとって重要なのは”流体”の挙動ではなく”船体”の挙動に対する理解であって、そういった視点に立てば波浪中船体応答を理解することはそこまで難しくない。つまり、耐航性の分野がとっつきにくいとされている一番の理由は、多くの教科書が系統立てた説明を重んじているがゆえに、船体運動力学と流体力学の分離がされていないことが原因であるといえよう。船体応答の力学に限定すれば、前提知識として剛体の力学、振動論、梁理論の初歩を押さえておけば、あとは波に対する直感的なイメージを掴むだけで実用上困らない程度の理解は得られると著者は考える。

本資料はこの理念のもと、「力学、振動論、梁理論の基礎知識は多少あるが流体力学は全く分からない」といった読者を対象とし、web アプリ”SPREME-web”の操作を通して、波浪中船体応答の傾向・特性に対する理解を深めてもらうことを目的とする。説明は物理的な直感に重きを置き、難解な数式は極力排除している。なお、本資料は要所で web アプリを用いたハンズオン演習を行うことによって理解を深めることを想定しているが、web アプリが有償でありことを鑑み、演習をスキップしても問題なく読み進められるように構成している。

2. 実際に計算してみよう

2.1. 準備

① 以下の URL から船体情報ファイル SHIPINP_**.DAT を保存する（Microsoft Edge, Google Chrome なら右クリック→名前をつけて保存）。拡張子は".DAT"にしておく。

・https://cloud.nmri.go.jp/apps/spreme-web/api/textfile/SHIPINP_CS.DAT （コンテナ船）

・https://cloud.nmri.go.jp/apps/spreme-web/api/textfile/SHIPINP_BC.DAT （ばら積み船）

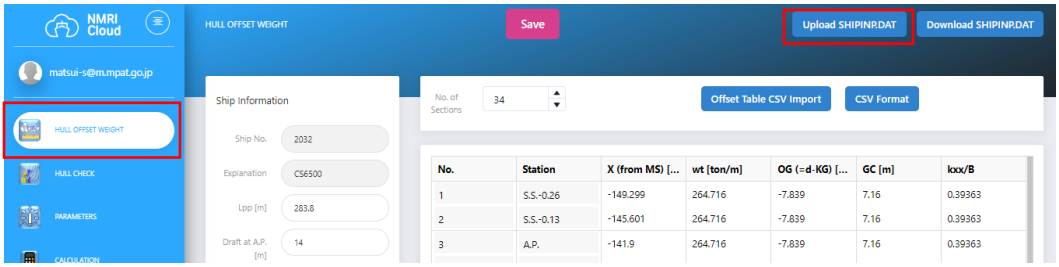
② 海技研クラウド(nmri.go.jp)にログイン

③ SPREME-web のページ https://cloud.nmri.go.jp/apps/spreme-web にアクセス

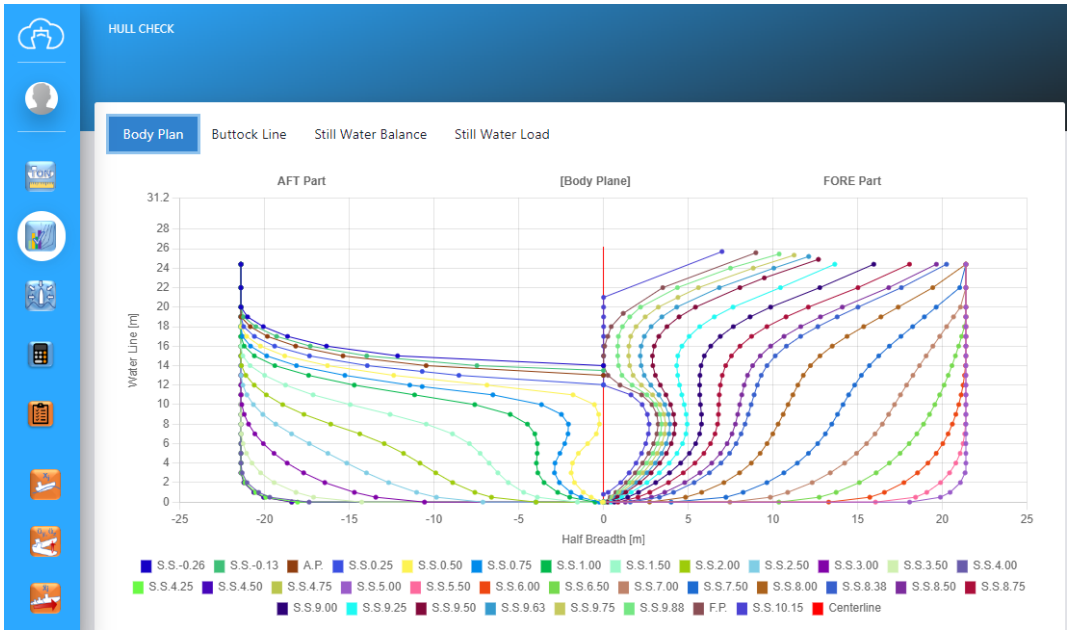
2.2. 船体情報の入力

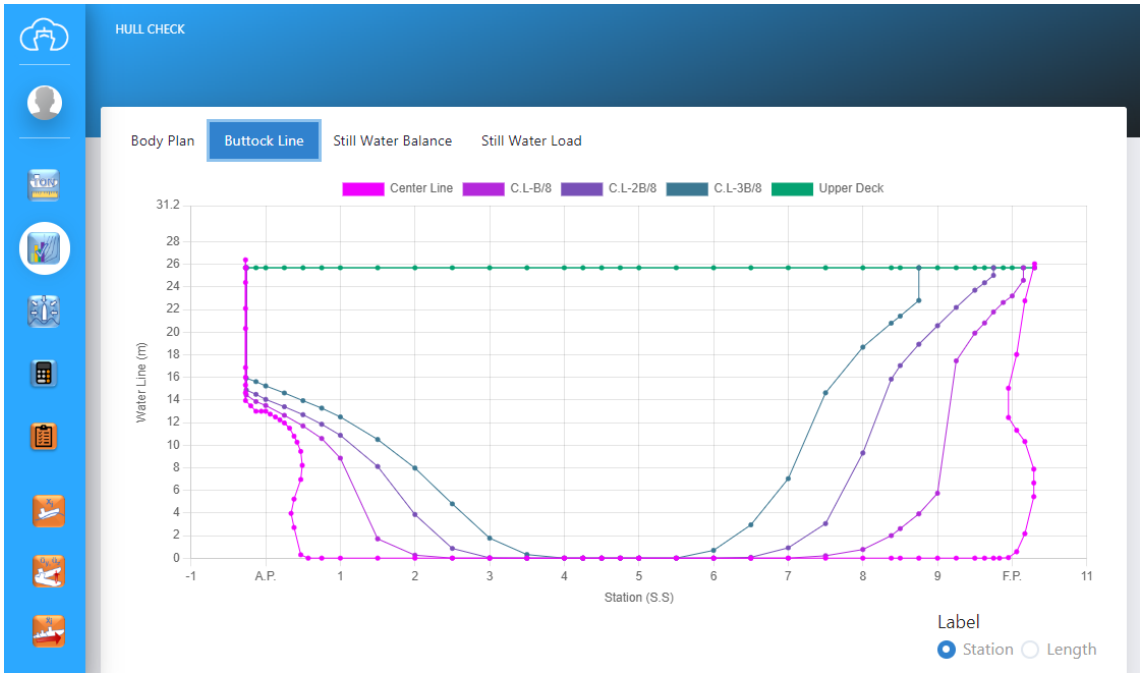
＜操作手順＞

① [HULL OFFSET WEIGHT]タブから、船体情報を入力する。ここでは、上記①で作成した SHIPINP_**.DAT ファイル（本資料ではコンテナ船を使う）を、右上の[Upload SHIPINP.DAT]ボタンからアップロードすることで船体情報を一括入力する。



② [HULL CHECK]タブで、船体情報が正常に入力されていることをチェックする。[Body Plan], [Buttock Line]タブから入力した船型を確認

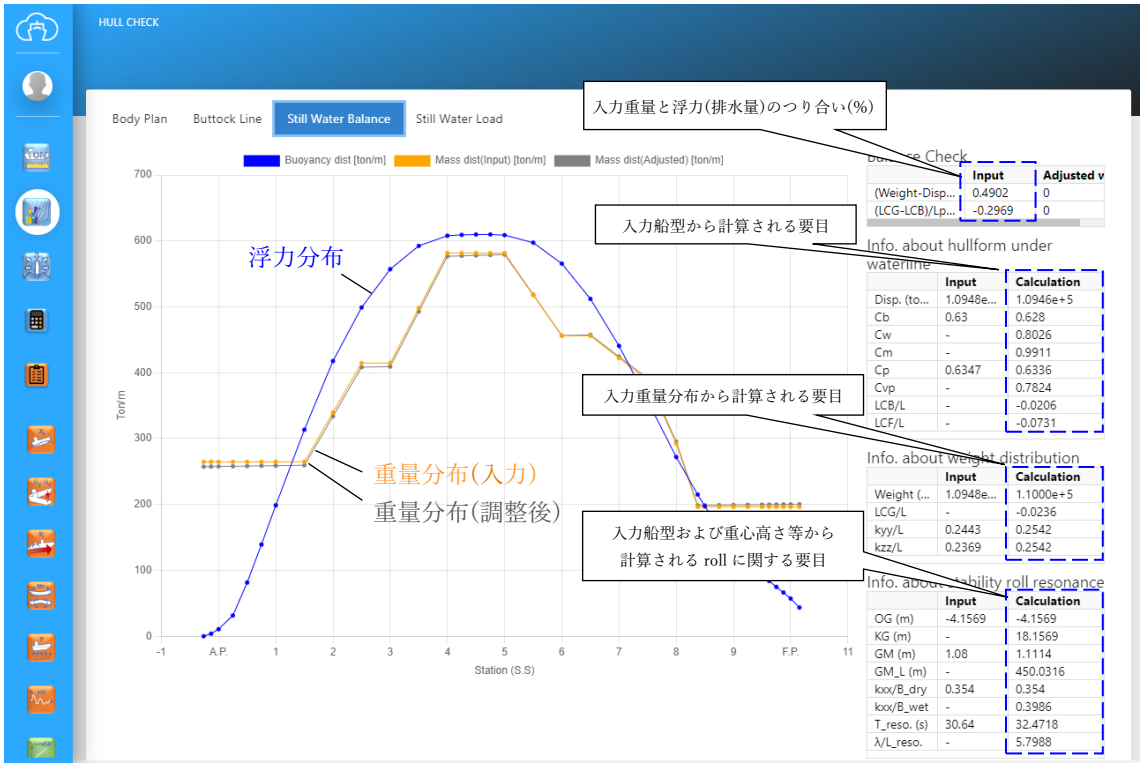




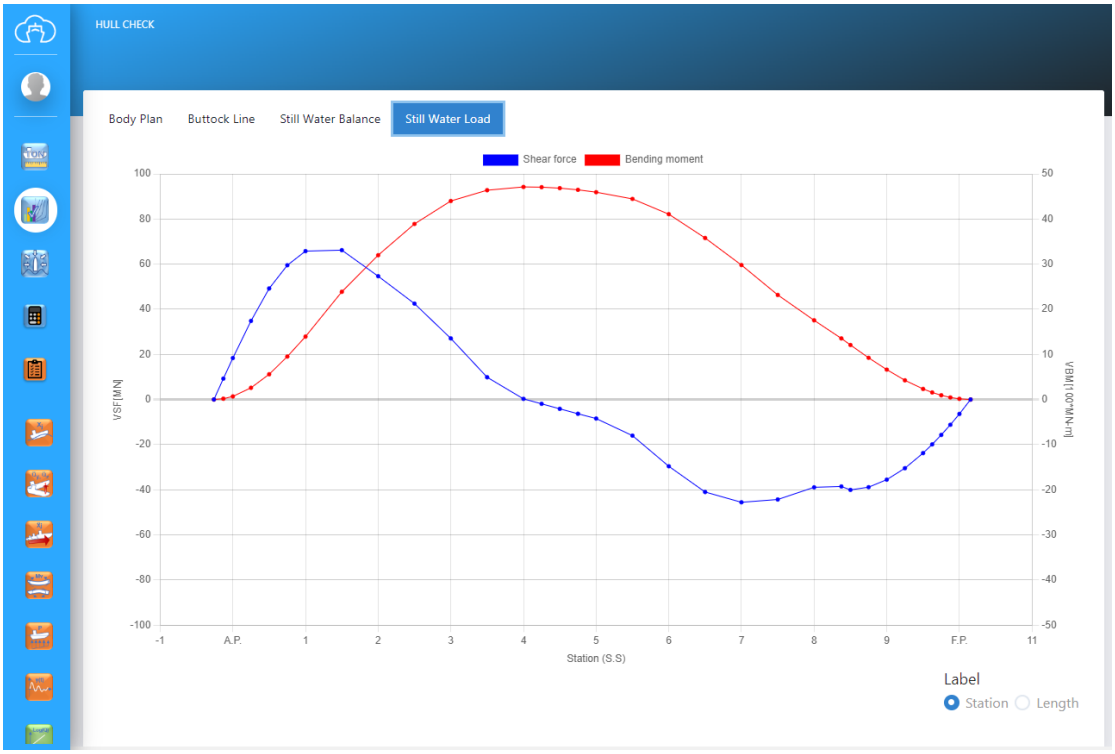
③ [Still Water Ballance]タブより釣り合い状態等の情報を確認。特に重要なのは

・重量と浮力のつり合いが取れているか → 右上枠の不釣り合い率が大きくないか、重量分布の入力値（橙色）と調整後（灰色）に大きな差がないか

・GM の Calculation が目標値に近い値になっているか



④ [Still Water Load]タブより静水中の VSF(垂直せん断力)，VBM(垂直曲げモーメント)を確認



＜押さえるべきポイント＞

I)　船体応答解析では船体の何の情報が必要か？

基本は、流体力計算に必要な喫水線下の船型[1]と、運動の計算に必要な剛体の質量マトリクスに関する情報（重量、重心位置、慣性モーメント）だけで船体運動は計算できる[2]。ハルガーダ断面力（垂直曲げモーメント VBM など）を計算する場合は追加で重量分布が必要となり、捩りモーメントを計算する場合に限り、さらに重心高さ分布、環動半径分布、せん断中心が必要になる。

本アプリでは、船型はオフセットと喫水より決定し、質量マトリクスに関する情報は以下のように決定している。

a)　重量：　排水量と一致

b)　重心前後位置 LCG：　浮心前後位置 LCB と一致

c)　重心上下位置：　喫水線下重心位置$\overline{OG}$として入力

d)　重心左右位置：　センターライン（左右対称を仮定）

e)　Roll 慣性モーメント：　横環動半径k_{xx}、あるいは roll の固有周期T_rを入力

f)　Pitch/yaw 慣性モーメント：　調整後の重量分布から計算される値

g)　慣性乗積：　ゼロ（慣性主軸は座標軸に一致）

II)　静水中の釣り合いについて

上記 I)の a),b)の条件（重量＝排水量、LCG=LCB）は、静水中の上下力・トリムモーメントの釣り合い条件そのものである。本アプリでは、入力された重量分布はこの条件が成り立つように内部で自動調整される。調整後の重量分布や、元の重量分布の不釣り合い率は[Still Water Balance]タブから確認できる（下図）。

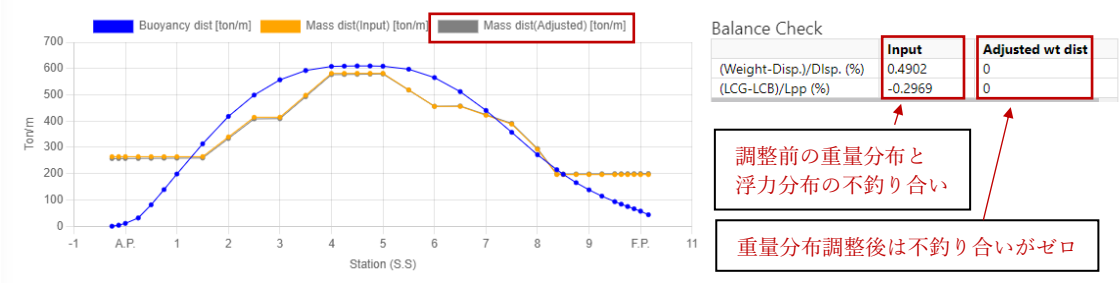


図 2.1 静水中のつり合い確認画面

---

[1] 線形解析なら喫水線下の船型だけでよいが、構造解析に水圧を受け渡す場合や、非線形解析では乾舷の形状も必要。付録 6.4 を参照。

[2] 横メタセンタ高さ$\overline{GM}$の入力は、上記 I)の入力があれば基本的に不要である。なぜなら$\overline{GM}$は喫水線下重心位置$\overline{OG}$、喫水線下浮心位置$\overline{OB}$、横メタセンタ半径$\overline{BM}$を用いて$\overline{GM} = \overline{OG} - \overline{OB} + \overline{BM}$と分解されるが、$\overline{OG}$は A)で述べた重心高さの情報、残る$\overline{OB}$、$\overline{BM}$は水面下の船体形状のみから決定される量だからである。縦メタセンタ高さ$\overline{GM_L}$も同様。内部で計算される$\overline{GM}$, $\overline{GM_L}$は[Still Water Balance]から確認できる。

III）静水中の VSF, VBM について

[Still Water Load]タブから確認できる静水中の VSF, VBM は、梁理論で通常行われるように(重力分布)−(浮力分布)の積分で求められている。ここで、梁理論で習う性質から

ポイント#1　船体梁に作用する VBM と VSF の特徴

・VBM を微分すると VSF、VSF を積分すると VBM になる

・船は両端自由端なので VSF, VBM 分布は両端で必ずゼロになる

・VSF は正側の面積と負側の面積が必ず同じになる

が言えることは押さえておきたい。3 つ目の性質は、1 つ目と 2 つ目の性質から導かれる。VBM が両端でゼロになる[3]ということは、VSF を船の全長で積分した値がゼロになることを意味するためである。

以上の特性は波浪中でも常に成り立つものであり、波浪中の VSF の分布形状を理解するのに重要になる。

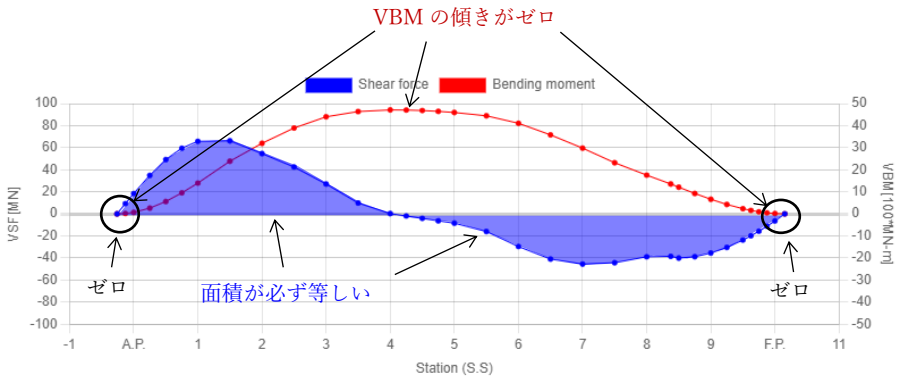


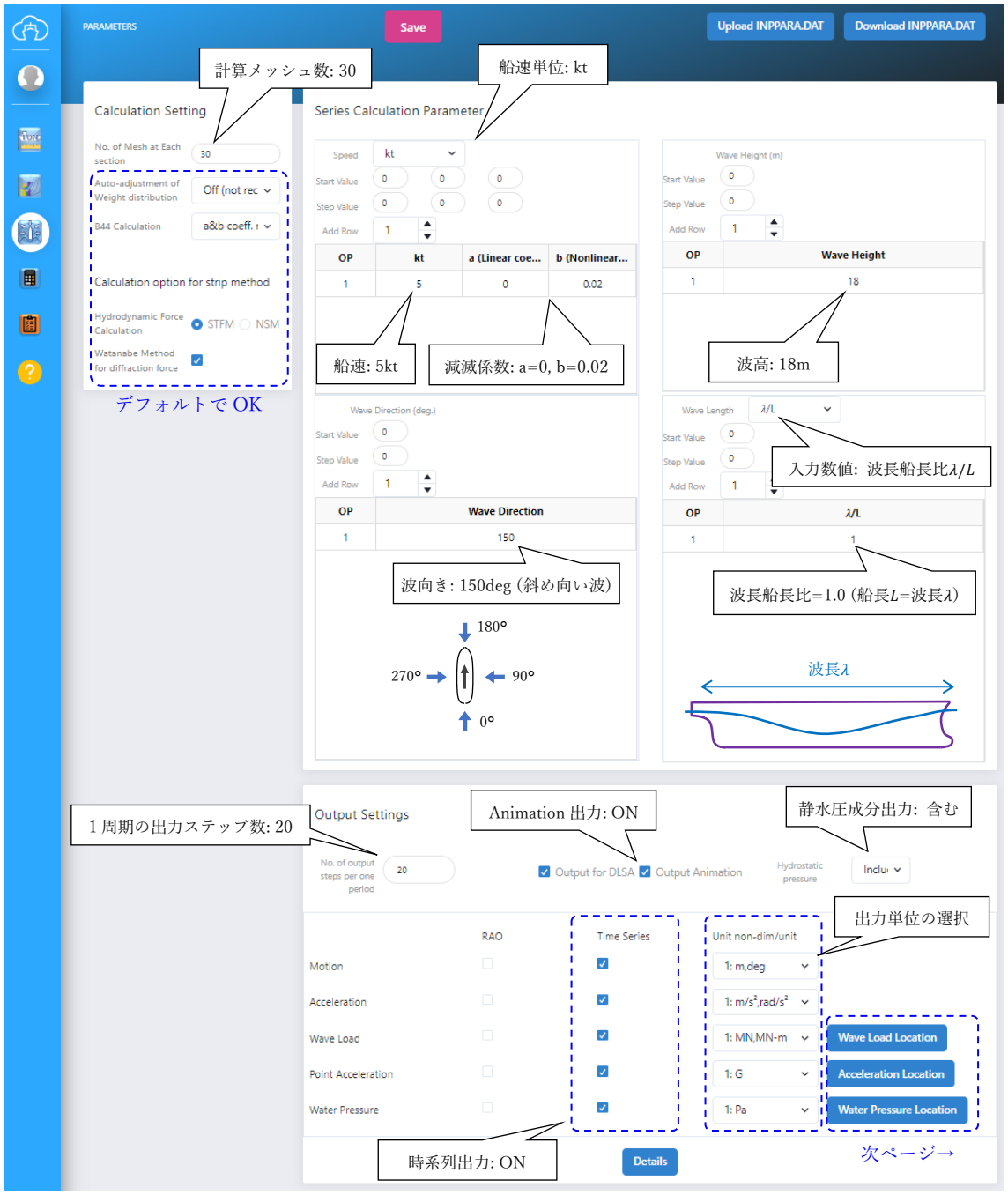
図 2.2 静水中の VBM と VSF

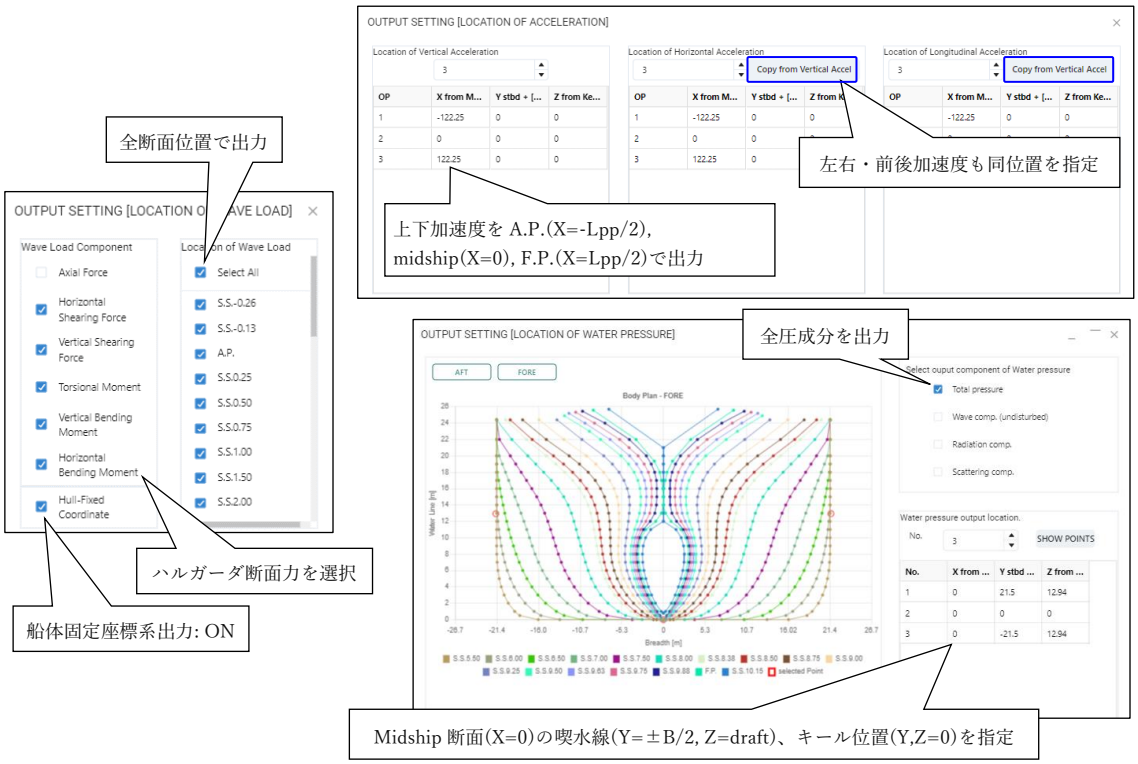
[3] 分布力の積分から VSF, VBM を求める場合、船首端の値がゼロとなるには、静水中のつり合い条件（重量=排水量, LCG=LCB）が成立している必要がある。

2.3. 時系列およびアニメーションの出力

＜操作手順＞

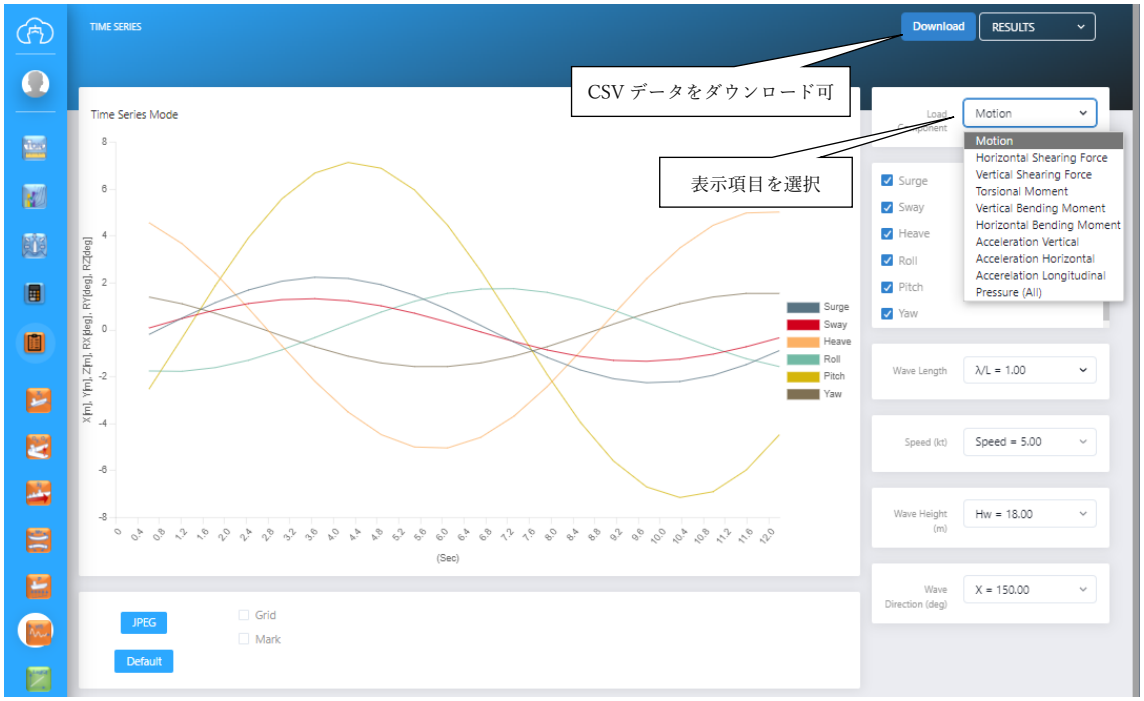
① [PARAMETERS]タブから計算条件を入力する。まずは１つの規則波中の計算を行い、時系列データとアニメーションを出力することにする。以下の図を例に値を入力する。





② [CALCULATION]タブからストリップ法 or 3D パネル法計算を実行する

③ [RESULTS]=>[TIME SERIES]から時系列の結果を見る。時系列のグラフは横軸が時間で、波の 1 周期分の応答が出力される。本アプリでの基準時間($t = 0$)は、波の谷が midship 断面かつセンターライン位置に達する瞬間と定義されている。



④ 右上の[Download]ボタンから[RESULTS]フォルダをダウンロードすることで、結果データの書かれた CSV ファイルが得られる。他には、[LOG]フォルダをダウンロードすることで、エラーメッセージの出力される RUNTIME_MESSSAGE.txt ファイル、静水中のつり合い等のデータの出力される InputCheck.csv ファイル等を得られる。

⑤ アニメーションの描画をするには、[ANIMATION]フォルダをダウンロードする。ANIMATION フォルダを解凍したのち、フリーソフト Paraview を開いて用いて同フォルダを参照することで、波浪中船体運動のアニメーションを描画することができる。詳細は、左タブ下方にある HELP をクリックし、HELP の付録を参照。

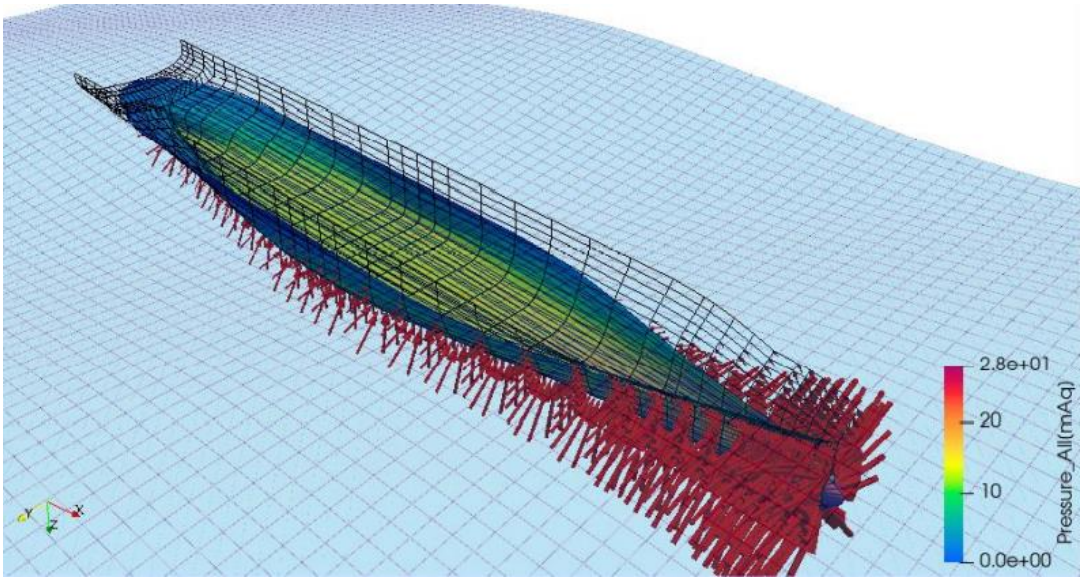


図 2.3 Paraview を用いた船体応答アニメーションの例

＜押さえるべきポイント＞

I) 何を計算・出力でき、どのように使われるのか？

本アプリは波浪中応答計算ツールとして基本的な、規則波中における以下の応答を出力できる。

a) 6 自由度の船体運動/加速度：

船舶や航空機に対しては 6 自由度の運動それぞれに surge, sway, heave, roll, pitch, yaw と名前がついている（図 2.4 左）。運動性能評価のための基本的な指標で、例えば荷崩れや復原性の指標として roll や pitch の最大傾斜角や加速度が用いられる。また、加速度は慣性力の評価にも用いられる。

b) 6 種類のハルガーダ断面力：

船体梁の横断面に作用する、6 方向の力であり、軸力(AXF)、垂直/水平せん断力(HSF/VSF)、垂直/水平曲げモーメント(HBM, VBM)、捩じりモーメント(TM)がある（図 2.4 右）。主に構造強度評価に用いられる。

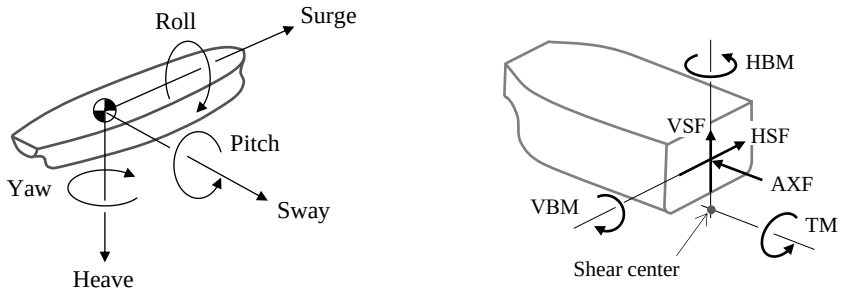


図 2.4 Web アプリにおける 6 自由度運動および 6 種のハルガーダ断面力の定義

c) 指定位置の上下・左右・前後方向加速度：

加速度は乗り心地の観点から、例えば居住区の左右加速度や船首の上下加速度がよく用いられる。また、タンクの内圧、慣性力の計算のためタンク重心位置の加速度が用いられる。基本的には上記 a)の運動加速度から計算される値だが、a)の加速度は空間固定座標系での値なのに対し、こちらは船体固定座標系での値、すなわち船体の傾斜による重力加速度が含まれるという点が異なる（3.6 節で詳しく述べる）。

d) 船体表面の水圧：

船体表面のある固定した点での水圧であり、流体の運動に起因する成分に加え、船体の姿勢変化（沈下/浮上）による静水圧の変化分も含まれる。水圧分布は、構造解析のための荷重として用いられる。加えて、喫水線近傍の水圧はデッキ海水打ち込みの予測に用いられる。これは、喫水線における圧力水頭がそのまま喫水線からの相対波高に対応するためである(下図)。

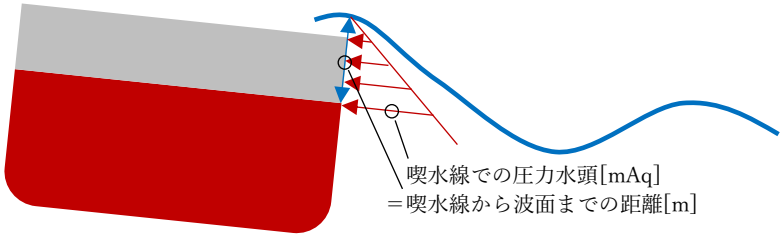


図 2.5 喫水線での圧力水頭と喫水線から波面までの距離の関係

II) 規則波中の応答は調和振動

線形解析では、規則波中（sin/cos カーブで表せる波）の応答（の変動成分）はいずれも調和振動（sin/cos カーブの時系列）になる。というよりむしろ、応答を調和振動で近似するのが線形解析である[4]。すなわち、規則波中の応答yは"$y(t) = A\cos(\omega t + \varepsilon)$"の形で表せ、周波数$\omega$は入射波の周波数と一致するので振幅$A$と位相$\varepsilon$さえあれば応答の情報としては十分ということである。

III) 喫水線近傍の圧力修正

水圧の時系列を表示すると、他の時系列と異なっていることがわかる。まず、キールでの圧力はゼロ平均となっていない。これは、水圧の波浪変動成分に定常成分である静水圧$\rho g z$が足されているからである（[PARAMETERS]で[Hydrostatic pressure]を ON にしたため）。また、喫水線における水圧はゼロが下限となっていることがわかる。これは、ここでは大気圧がゼロとなるよう圧力が定義されており、船にかかる圧力は大気圧以下になることがないためである。

線形解析では、実は流場は喫水線以下でしか定義されておらず、喫水線以下の圧力しか求まらない（6.4.3 節）。ところで、上記 I)-d)で説明したとおり、喫水線上での圧力水頭はそのまま波面高さを表すのであった。そこで線形解析では、喫水線より上の圧力分布を表現するために、「①喫水線での圧力が正の場合、これを乾舷に 45° で外挿する」という処理が瞬時々々で施される。これと「②負圧をゼロにする」という処理とを合わせて、波から出入りする船体の圧力分布を正しく再現することができる。このような圧力修正は、解析で得られた圧力分布を構造解析に適用する際に特に重要となる[5]。

---

[4] 少し語弊がある。これは船体運動を線形近似、すなわち波振幅に比例する成分のみ考慮した結果の帰結である。関連脚注：19

[5] ただし、線形解析の船体運動やハルガーダ断面力は修正"前"の圧力分布によって計算されていることに注意されたい。圧力修正は、あくまで水圧の出力だけに関係している。修正前の圧力分布は作用領域が喫水線以下で固定されているため、その積分は線形演算である一方、圧力修正後は圧力の作用領域が時間変化するため、その積分は非線形演算となり線形解析の枠を超えてしまう（調和振動にならない）。

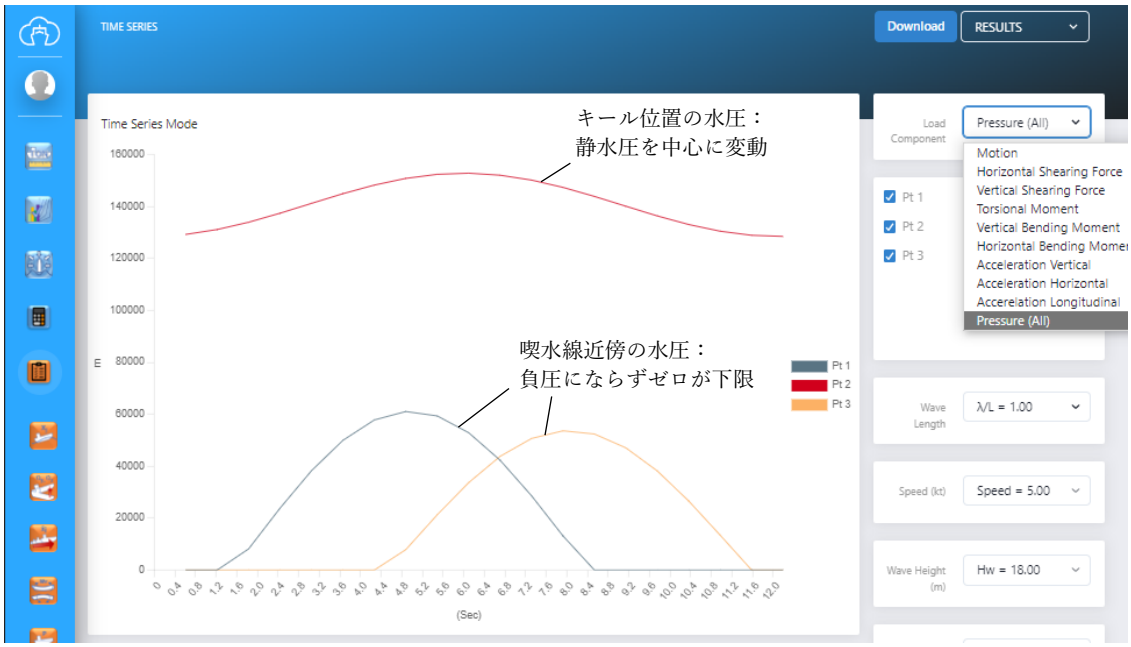


図 2.6 圧力の時系列

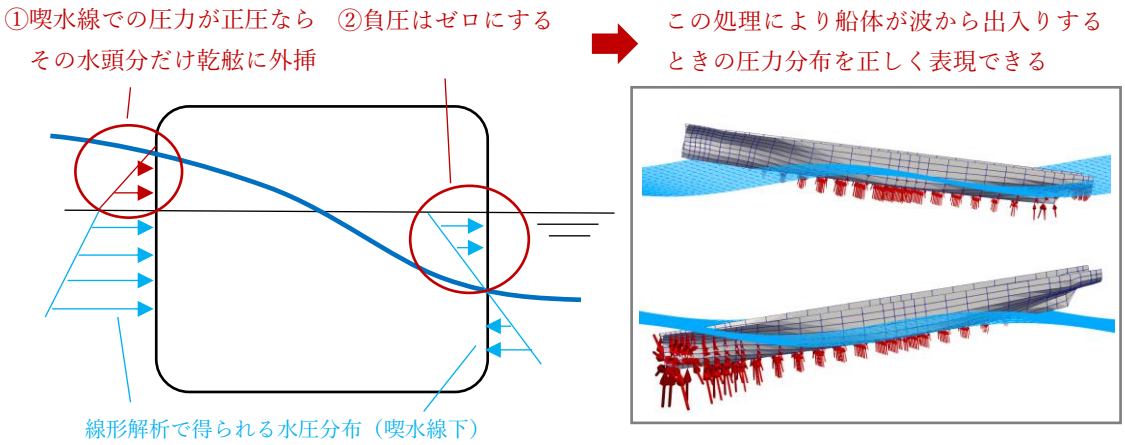
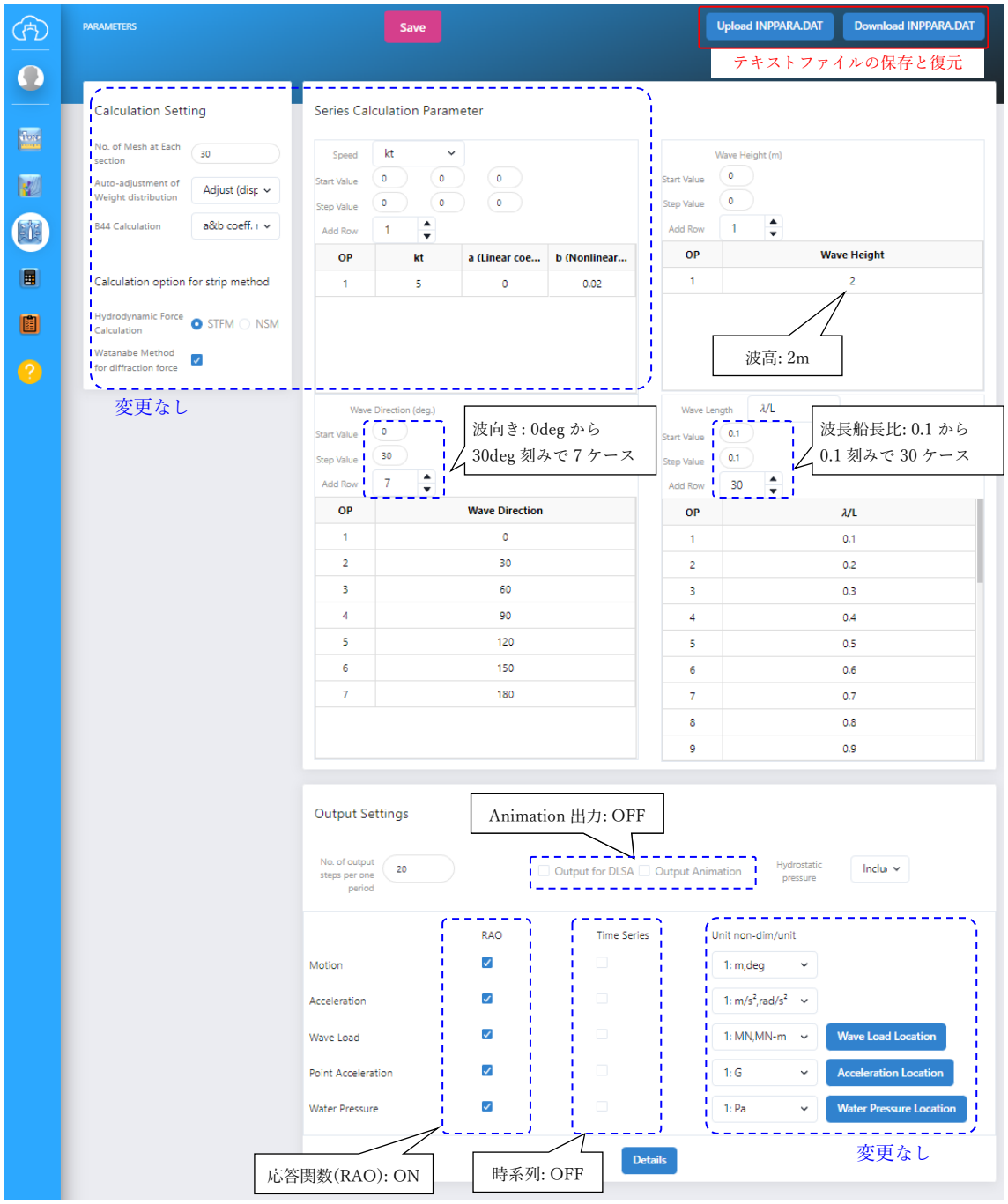


図 2.7 喫水線近傍の圧力修正

2.4. 応答関数の出力

＜操作手順＞

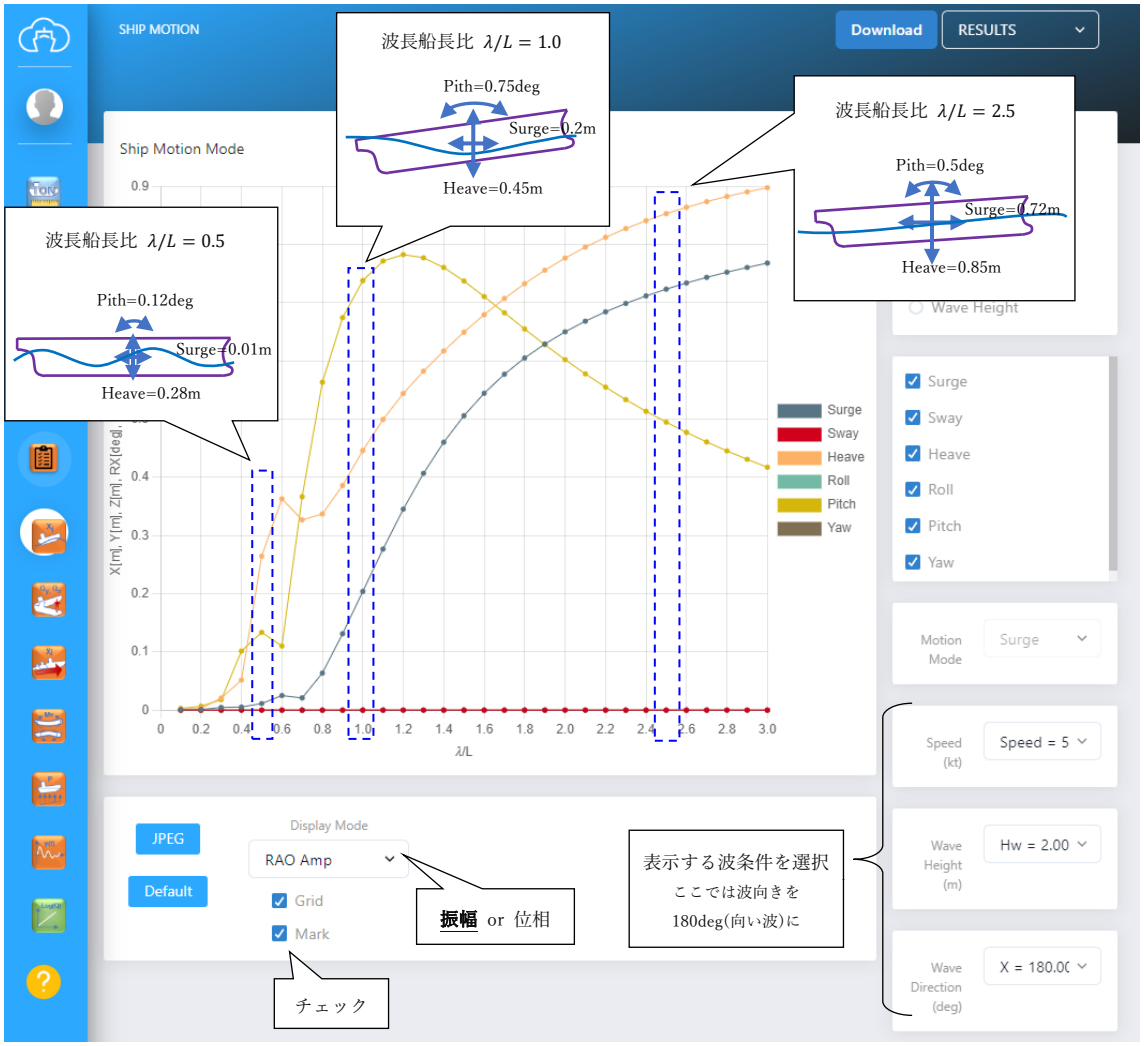
① [PARAMETERS]タブから、応答関数の出力のための計算条件を入力する。前回の入力情報を保存しておきたい場合は、右上の[Download INPPARA.DAT]ボタンから INPPARA.DAT ファイルをダウンロードしておけば、[Upload INPPARA.DAT]ボタンからアップロードすることで復元できる。



⑥ [CALCULATION]タブからストリップ法 or 3D パネル法計算を実行する

⑦ [RESULTS]=>[SHIP MOTION]から船体運動の応答関数を見る。[Display Mode]は[RAO Amp]に、[Wave direction]は[$\chi = 180$deg](正面向い波)にする。

ここで応答関数の見方を説明する。応答関数の横軸は（今回の場合）波長船長比であり、グラフの左側ほど波長が短く、右側ほど波長の長い波の中の応答ということになる。縦軸は船体運動の振幅(m, deg)を表す。正面向い波なので、左右対称の縦運動である surge, heave, pitch 運動のみが生じている。波長船長比 0.5（短波長）での運動はいずれも小さく、波長船長比 1.0 では pith 運動が大きく、また波長船長比 2.5（長波長）では heave, surge 運動が大きくなっている。



⑧ 次に、[Display Mode]を[RAO Phase]にして、位相を表示する。横運動(sway, roll, yaw)の位相があると見辛いので、右枠のチェックを外す。

位相の見方について説明しておく。まず、規則波中の応答は$y(t) = A\cos(\omega t + \varepsilon)$と表されると述べた。波長船長比 2.5 の heave 運動は$\varepsilon = 0$[deg]となっているが、これはすなわち$y(t) = A\cos(\omega t)$なので$t = 0$（船体の MS 位置に波の谷が来る瞬間）で heave が最大になるということである。heave は下方向への移動を正としているため、これは波の谷が来る瞬間に最も船が沈むという当たり前のことを表している。

次に波長船長比 2.5 の pitch 運動に着目すると、$\varepsilon = -90$[deg] $(= -\pi/2$ [rad])となっている。これは、$y(t) = A\cos(\omega t - \pi/2)$であるため、$\omega t - \pi/2 = 0 \leftrightarrow t = T/4$ ($T = 2\pi/\omega$は周期[s]）のときに最大となる。すなわち、船体の MS 位置に波の谷が来る瞬間から 1/4 周期後の波傾斜が最大になる瞬間に pitch が最大（船首上げ状態）になるという、こちらも当然のことを表している。

基準時間$t = 0$の定義はツールによって様々で、また応答の正負の定義もツールに依るため、出力される位相はツール間で値が異なることに注意が必要である。

⑨ 次に、波向き毎の応答を並べて表示する。[Display Mode]を[RAO Amp]にもどし、[Data Series]を[Wave Direction]に、[Motion Mode]を[Heave]にする。すると、波向きχ = 0°~180°の heave の応答関数が表示される。同じ波長船長比λ/Lでも、波向きによって大きく応答が異なることがわかる。

⑩ 左側のタブから、運動以外の応答（出力設定でチェックした応答）を見られる。ほかの応答についても、表示方法は運動と同様である。ハルガーダ断面力は[WAVE LOADS]タブで、これについては下の[Horizontal Axis]ボタンから横軸をλ/Lから section 番号に変更することができる。

＜押さえるべきポイント＞

I）　応答関数とは

規則波中の応答は調和振動なので、振幅Aと位相εの情報のみで応答を表現できると述べた。そこで、あらゆる規則波中の応答の情報を網羅できる応答関数（RAO: Response Amplitude Operator)がよく用いられる。応答関数の正しい定義は以下のとおりである。

> **ポイント#2　応答関数**
>
> 入射波の振幅$\zeta_a = 1\mathrm{m}$のとき（波高$H_W = 2\mathrm{m}$のとき）の応答振幅Aおよび位相εの、波条件を変数にとった関数を応答関数と呼ぶ

基本的には、波周波数ωと波向きχを変数とした$A(\omega,\chi), \varepsilon(\omega,\chi)$を応答関数と呼ぶが、波向きを固定して変数から除く場合や、船速を変数に加えることもある。また、振幅$A(\omega,\chi)$のみを指して応答関数と呼ぶこともある。

応答関数を単位波振幅での値として定義する理由は、線形解析では“応答振幅は入射波の波振幅に比例する”ことを前提としているためであり、単位波振幅の応答振幅を知っておけば、波振幅αm の応答振幅はそれをα倍するだけでよいからである。かくして、応答関数が求まれば、あらゆる規則波における応答の情報が不足なく得られるというわけである。なぜ波高$H_w = 1\mathrm{m}$ではなく波振幅$\zeta_a = 1\mathrm{m}$で定義するのかについては、5.4 節まで読めば分かる。

II）位相は重要か？

結論から言うと、単独の応答を調べる場合には不要で、複数の応答の組み合わせ（同時性）を調べる場合に必要になる。後者の具体例として、二重底の突き上げ変形が挙げられる。二重底の突き上げ変形にはホールドから受ける内圧と、船底から受ける外圧の差が影響するため、これら 2 つの応答の組み合わせ（同時性）が重要になる。内・外圧の位相が同じだと両者は打ち消しあう関係にあるが、逆位相だと両者は強め合う関係にあり（下図)、変形は位相差に大きく左右されることが想像できる。なお、圧力の正負は矢印の向きではなく流体の圧縮／引張（流体の接する面を押すか引くか）で決まる。

基本的に、運動性能評価では roll や船首加速度といった単独の応答に興味があることが多いため、位相の情報を必要としないことが多い。一方、船体構造は複数の荷重因子から影響を受けることが殆どであるため、構造強度評価では位相の情報が重要になることが多い。

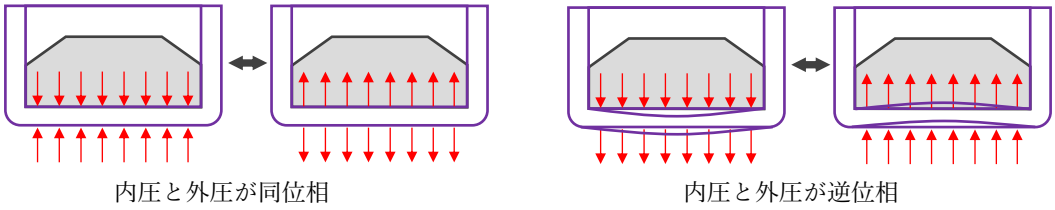


図 2.8　内・外圧の位相差による二重底の変形（図の圧力は静水中成分は除いている）

2.5. 短期・長期予測計算

＜操作手順＞

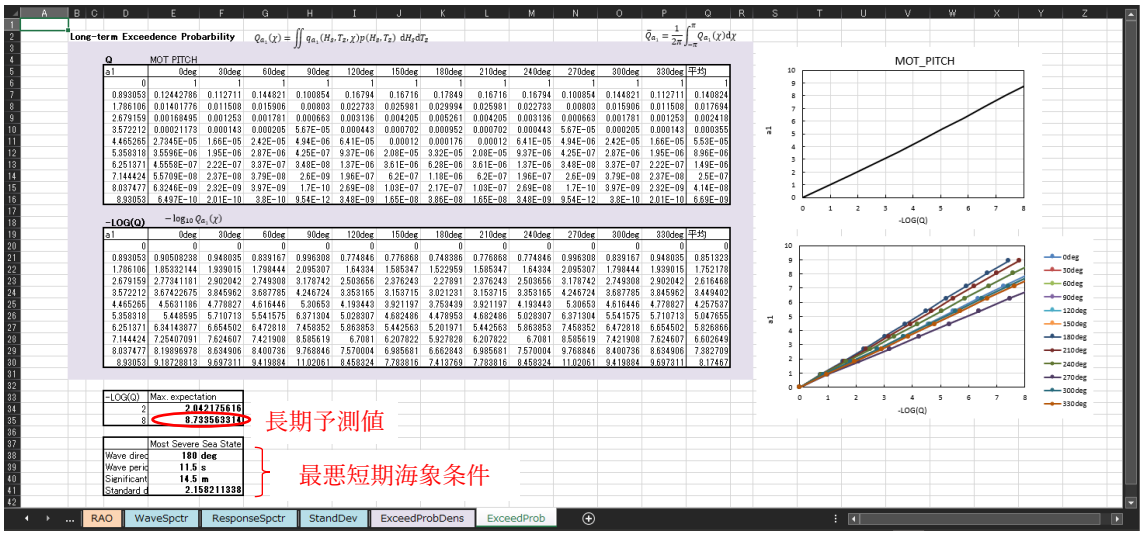
① 上記 2.4 の応答関数を計算した状態で、[RESULTS]タブ下の一番下にある[LONG TERM PREDICTION]タブを選択し、画面中央の[Calculate Long Term Prediction]ボタンをクリックして短期・長期予測計算を実行する

② DLP-Prediction_***.xlsm ファイルがダウンロードされるので開く

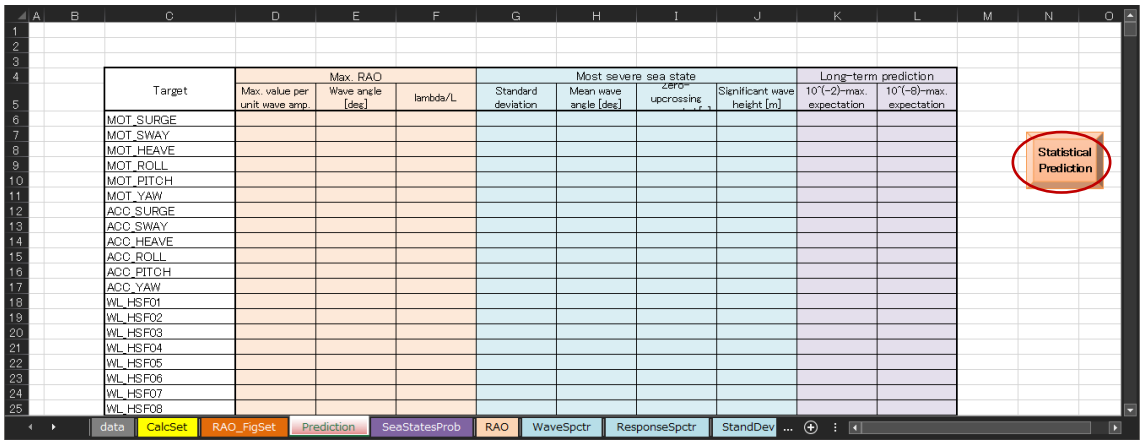
③ [CalcSet]シートを見てみよう。黄色いセルが入力情報だが、必要な情報は全て入力済みになっている。I12 セル以降には船体応答のリストが入力されている。このリスト名は以降のグラフに表示されるラベル名であり、自由に変更可能である。また、I8 セルには以降の短期・長期予測計算で計算する応答であり、リストから 1 つ選ぶことができる。

④ 薄橙色のシート[RAO]には、リスト全ての応答関数（振幅）が貼り付けられている。水色のシート[WaveSpctr], [ResponseSpctr], [StandDev]では選択した 1 つの応答に対しての短期予測計算が、薄紫色のシート[ExceedProbDens], [ExceedProb]では長期予測計算が行われている。

⑤ 短期・長期予測で最も重要なのは[ExceedProb]シートの E35 セルにある**長期予測値**（約 25 年間で発生しうる最大の応答値）である。また、E38 セルには**最悪短期海象**（最も厳しい短期海象）の条件が表示される。これらは、[CalcSet]シートで選んだ応答に対しての値である。



⑥　リストにある全ての応答に対して長期予測計算を行う場合には、[Prediction]シートにある[Statistical Prediction]ボタンを押してマクロを実行する（リストの数だけ時間がかかる。中断するには Esc キーを押す）。応答関数のピークに関する情報（薄橙色）、最悪短期海象条件（水色）長期予測値（薄紫色）が自動で記入される。



＜押さえるべきポイント＞

I） 短期・長期予測の要点

短期予測とは、応答関数と波浪情報（**波スペクトル**）を使って、**短期海象**（3 時間程度、約 1000 波）での船体応答の統計値を予測することである。短期予測では、船が実際にその海象に遭遇するかどうかは関係なく、ある与えられた海象条件下における応答の統計値を予測するものである。

一方で**長期予測**は、船の就航期間を想定した長期期間（25 年程度、約 10^8 波）での船体応答の統計値を予測することである。実際に船が遭遇する短期海象の頻度を**波浪発現頻度表**を用いて考慮し、各短期海象における短期予測の結果を足し合わせて長期の統計値が計算される。

そして短期・長期予測の目的は、主に長期期間で発生しうる最大の応答値である**長期予測値**や、応答に対して最も厳しい短期海象である**最悪短期海象**を特定することにある。なお、基本的に長期予測は単独の応答を対象とするので、位相の情報は不要である。

II）注意点

短期・長期予測を行う場合、[PARAMETERS]タブで出力単位は無次元[0: non-dim.]以外を選択しておこう。無次元の応答関数を使うこと、混乱のもとになるだけでなく、例えば波傾斜で無次元化した pitch 運動を用いた場合、（波長ごとに異なる値で除されるので）誤った結果が導かれる。

また、今回の計算では波向きを 0°~180°に限定し、右舷から波が入射する場合の応答関数のみを使って長期予測を計算した。しかしこれが許されるのは、左舷から波がきても右舷から波が来ても応答が同じ場合に限る。本アプリで出力される殆どの応答はこれが成り立つが、

- センターライン以外の位置の変動水圧
- センターライン以外の位置の加速度

については成り立たない。これらの応答に対して長期予測を計算したい場合は、0°~330°(30°刻み)の全方位の応答関数を計算して、それを用いる必要がある。

3. 波浪中船体運動の応答関数の特徴を捉える

細かい理論は抜きにして、6 自由度の船体運動の応答関数（振幅）の特徴と、その物理的なイメージをつかんでみよう。

本アプリでは運動の向きの定義は以下のようになっている。並進運動である surge, sway, heave 運動は、一般的な定義と同じで”船の重心位置“の変位として定義されている。

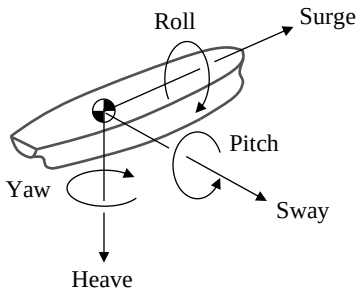


図 3.1 Web アプリにおける 6 自由度運動の定義

3.1. Heave 運動

前 2.4 節で計算した heave の RAO を再度眺めてみよう。

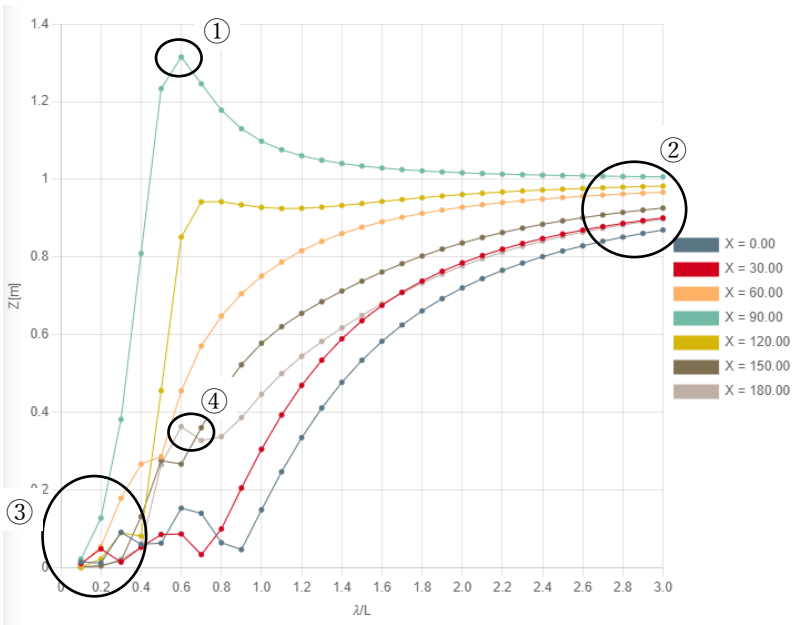


図 3.2 波向きごとの heave の応答関数

① 横波の$\lambda/L = 0.6$付近

まず着目したいのは、横波（$\chi = 90°$）の短波長域でピークをとっている部分である。このピークは**同調現象**であり、heave の**固有周期**（波の無い状況で船を掴んで持ち上げ、放したきに自由に heave するときの周期）と波の周期が一致していることが原因である。Heave の振幅が 1.3m なので、振幅 1m の波の 1.3 倍大きな運動をしている。

② 全波向きの長波長域 $\lambda/L = 3.0$

長波長域に着目すると、いずれの波向きも波長が長いほど heave の振幅が 1m に近づいていくことがわかる。これは波振幅が 1m であることから、heave が波に乗ってゆっくりと上下する状況を意味する。非常に波長が長い規則波（$\lambda/L = 5$~）では、波というよりも水面がただ上下するだけ、といったような状況になる。

③ 全波向きの短波長域 $\lambda/L = 0.1$

短波長域に着目すると、いずれの波向きも heave 運動がほとんど生じていない。これは、波長が短すぎると船にかかる山谷の数が増え、上下の力がキャンセルされるためである。

Heave 運動に限らず、一般に以下が言える。

ポイント#3　短波長域の船体応答

波浪変動圧力を除く船体応答（運動、ハルガーダ断面力）は、波長が短いほど流体力のキャンセルが起こるため小さくなる

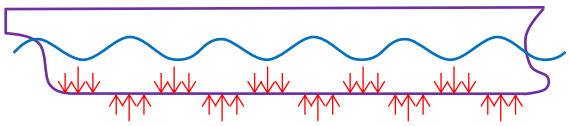


図 3.3　短波長規則波によって船に作用する力（図の圧力は静水圧成分を除いている）

④ なぜ横波以外では同調現象の明確なピークがみられないのか？

この原因は、上記③と同じである。Heave の固有周期は波向きに依らず同じはずで、この船ではおよそ（船速ゼロで）$\lambda/L = 0.6$付近にある。しかし、$\lambda/L = 0.6$は向い波では、船にかかる波と山がおおよそ 2 つずつになり上下の力がほぼキャンセルされてしまって、外力としては小さい状態になる（図 3.4 左）。一方で同じ$\lambda/L = 0.6$の波でも、横波の場合は船にかかる波の山 or 谷は 1 つになって、キャンセルされずしっかりと上下力が船に作用する（図 3.4 右）。

よって、横波以外でも同調現象は生じているはずなのだが、外力が小さくピークが顕在化しないというのが答えである。次のことは当たり前のことだが、波浪中の船体運動を理解す

る上で特に重要な観点である。

ポイント#4　運動の応答関数のピーク

一般に、同調周期でかつ外力が大きい場合に運動が過大になる。同調周期であっても、その波から受ける外力が小さいと応答関数はピークをとらない

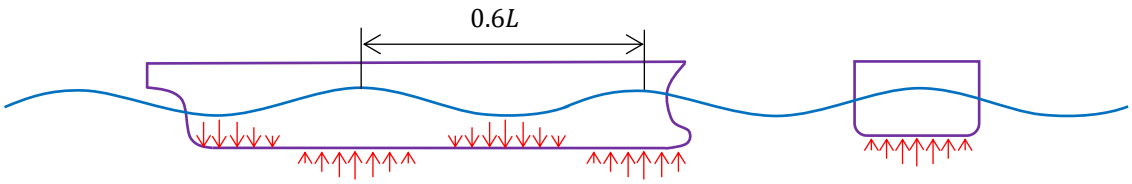


図 3.4　$\lambda/L = 0.6$の規則波によって船に作用する力

ただし、船速が速い場合、向い波でも heave のピークが表れることがある。これは、heave の固有周期は船速が変わっても変化しないが、**ドップラー効果**によって heave の固有周期の動揺を生じる波長λが長くなるためである。$\lambda/L = 1$より長い波長で同調を起こす場合、波の山谷による上下力のキャンセルは起こらず、大きな heave が生じる。

ドップラー効果の最も分かりやすい例として、向い波において入射波の進むスピードと全く同じスピードで船が前進する状況を考える。この場合、同じ波長λの波でも船が実際に受ける波の周期（**出会い波周期**と呼ぶ）は船が前進していない場合の半分になることがわかる。

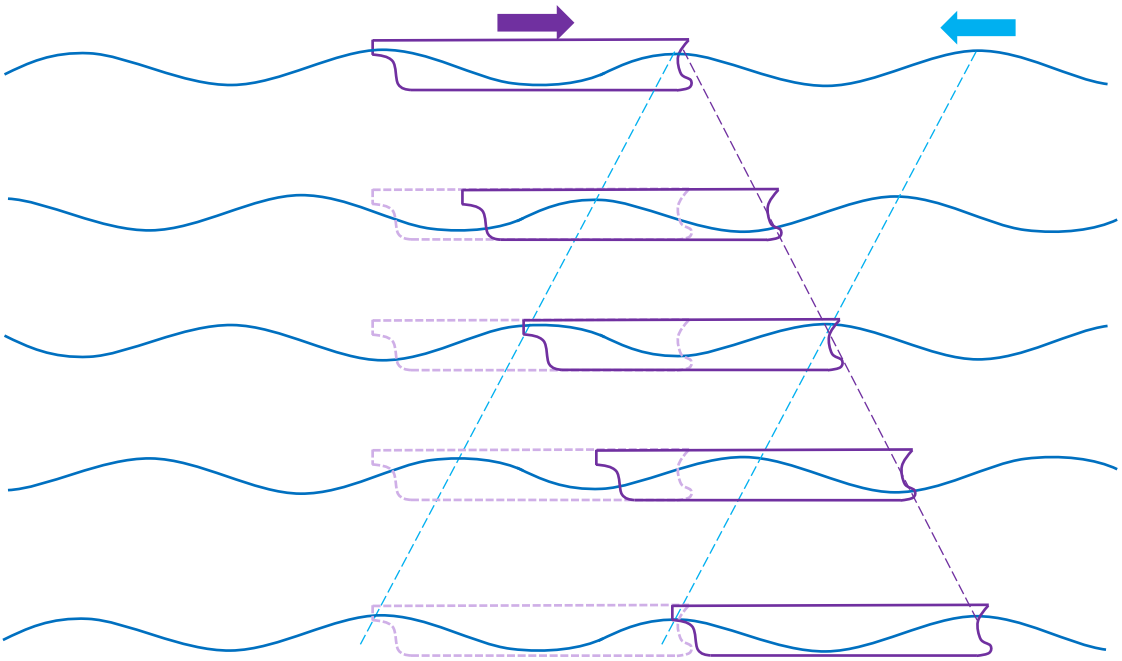


図 3.5　前進速度による向い波における出会い波周期の短縮（船が入射波と同じスピード

で前進する場合、船が前進しない場合の 2 倍の波を受け、出会い波周期は半分になる）

このことから、以下のことが言える。

ポイント#5　ドップラー効果

・向い波では船速が速いほど同じ波長でも出会い波周期が短くなる。したがって、船速が速いほど同調を起こす波長は長くなる

・追い波では逆に、船速が速いほど出会い波周期が長くなるため、船速が速いほど同調を起こす波長は短くなる [6]

以上のドップラー効果の性質を、式を交えて説明する。出会い波周期T_eにおける周波数はそのまま**出会い波周波数**$\omega_e(=2\pi/T_e)$とよばれ、次式で定義される。

ポイント#6　出会い波周波数

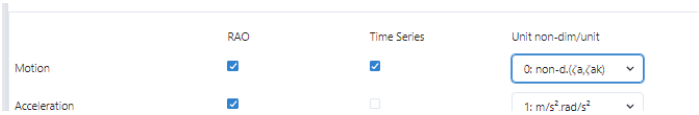
出会い波周波数ω_e[rad/s]は，波周波数ω [rad/s]、船速U[m/s]、波数k[rad/m]$:=2\pi/\lambda=\omega^2/g$、波向き$\chi$[rad]（向い波が$\pi$、追い波が 0）から次式で計算される

$$\omega_e=\omega-Uk\cos\chi$$

右辺第 2 項がドップラー効果を表す項で、波が形状を保って静止しているところに船がUで進むときの周波数である。横波$\chi=90°$では$\cos\chi=0$なので周波数は変わらず、向い波$\chi<90°$では周波数が上がり、逆に追い波$\chi>90°$では周波数が下がる[6]ことが分かる。

3.2. Pitch 運動

Pitch 運動については、degree 表示の応答関数に加え、[PARAMETERS]タブで Motion の単位を[0: non-dim(ζ_a,$\zeta_a k$)]とした場合



に出力される無次元の応答関数も並べて見てみる。無次元応答関数は、pitch 角を入射波の傾斜角で割った値である。

[6] これは船速が波のスピードよりも遅い領域での話である。追い波で、船のスピードが波のスピードに追い付くと波乗りの状態になり、出会い波周期は∞になる。このような状態は短波長で生じることがあるが、短波長での船体応答はそもそも小さいということもあり、そのような状況はふつう無視してよい。さらに船のスピードが上がると、波を追い越すので今度は（ω_eが負になるが絶対値を考えるので）出会い波周波数は上がっていく。

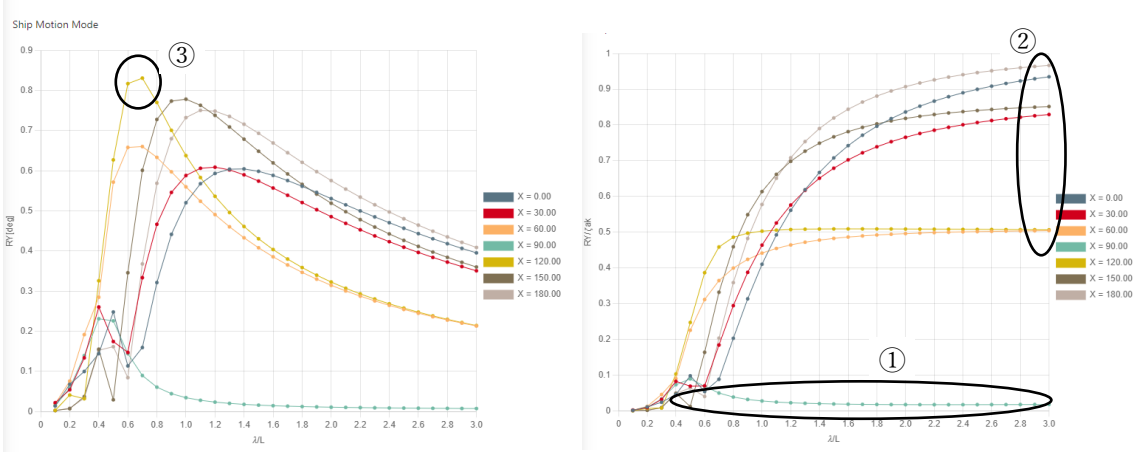


図 3.6 波向きごとの pitch 運動の応答関数（左：deg, 右：波傾斜角で除した無次元値）

① 横波$\chi = 90°$での pitch

横波では、pitch は最も小さくなる。この理由は、真横から波がきても船長方向にはほぼ均一な上下力が作用するだけで、pitch モーメントが殆ど生じないためである。

② 向い波、斜め波の$\lambda/L = 3.0$付近

Pitch の長波長での挙動について考えてみよう。この場合、degree 表示よりも pitch 角を波傾斜角で割った無次元値表示（図 3.6 右）の方が理解しやすい。まず、向い波$\chi = 180°$と追い波$\chi = 0°$を見ると、pitch の無次元値は長波長ほど 1 に近づいていることがわかる。これは、長波長になるほど pitch 角が波傾斜角に一致してゆくことを意味する（下図）。

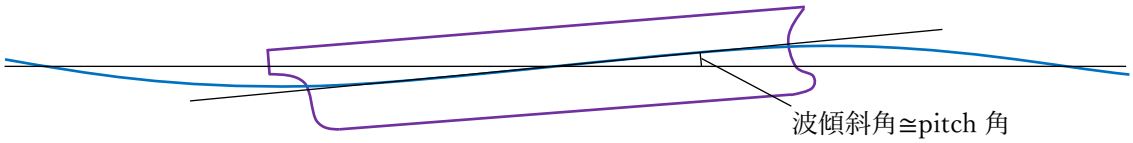


図 3.7 長波長の向い波・追い波の波における pitch 角と波傾斜角

次に、斜め波に着目すると、$\chi = 30°, 150°$では 1 よりやや小さい値に、$\chi = 60°, 120°$では 0.5 に近づいている。これらの値の意味するところは何だろうか？じつは、これらの漸近値は、波傾斜角ではなく、波を船長方向に切ったときの波傾斜角である。以下の図は、$\lambda/L = 0.5, \chi = 120°$の波と船体の概形である。波自体の波長は$\lambda = 0.5L$であるが、波を船長方向に切ったときの波長$\lambda_L$は$\lambda_L = \lambda/|\cos\chi| = 0.5L/0.5 = 1.0L$となって、2 倍の波長となっている。波振幅は同じで波長が倍になるので、波傾斜角は元の 0.5 倍となる。$\chi = 120°$で長波長域で無次元 pitch が 0.5 に漸近しているのは、pitch 角がこの”船長方向波傾斜角”(=0.5×波傾斜

角)に一致することを意味している。なお、$\chi = 30°, 150°$でも同様に考えることで無次元pitch は$\cos(30°) = 0.866$に漸近していることが分かる。

まとめると、以下のことを理解しておけばよい。

ポイント#7　Pitch 運動の支配パラメータ

Pitch 運動にとって重要なパラメータは波傾斜角ではなく船長方向の波傾斜角である

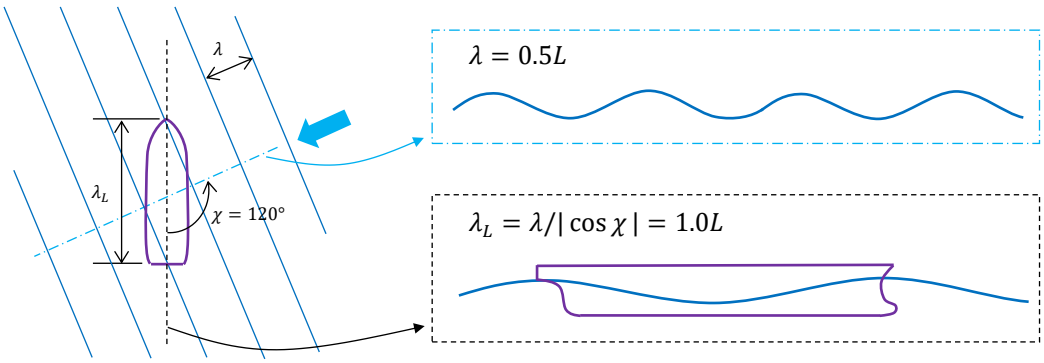


図 3.8　$\lambda/L = 0.5, \chi = 120°$の斜め波における波長$\lambda$と船長方向波長$\lambda_L$の関係

③　斜め向かい波$\chi = 120°$の$\lambda/L = 0.7$付近

Pitch 角の最も大きくなる斜め向かい波$\chi = 120°$の$\lambda/L = 0.7$付近に着目しよう。向い波$\chi = 180°$よりも横波に近い斜め向い波$\chi = 120°$の方が pitch 運動が大きくなるのは不思議かもしれないが、これは向い波より横波の方が heave 運動が大きかったことと、”pitch 運動に対しては船長方向波傾斜角が重要”という事実を踏まえれば理解できる。

まず、pitch の固有周期は heave の固有周期と大体同じになることが知られており、おおよそ$\lambda/L = 0.6$付近にある。一方、波から受ける pitch モーメントについては船長方向波長に依存し、船長方向波長λ_Lが$0.7L$より短いと pitch モーメントは（上下力のキャンセルが生じることで）非常に小さくなり、それ以上の長さがないと pitch 運動は大きくならない[7]。これより、正面向い波で pitch 運動が大きくならないのは、同調周期$\lambda/L = 0.6$付近で波から受ける pitch モーメントが非常に小さく、pitch モーメントの大きくなる波長$\lambda/L = 1.0$付近では同調周期から外れているからだということが分かる。一方、斜め向い波$\chi = 120°$では図 3.8 より船長方向波長は元の波長の二倍になるので$\lambda/L = 0.6$付近でも$\lambda_L = 1.2L$と pitch モーメントが十分に発生する波長になり、同調現象による大きなピークが表れる。

なお、heave と同じ理由で、船速が速い場合は、ドップラー効果によって正面向い波でも pitch 運動の同調によるピークが顕著になる。一般に、以下が成り立つ。

[7] これは、船に作用する pitch モーメント$\left|\int_{-0.5L}^{0.5L} x\cos(2\pi x/\lambda_L)\,\mathrm{d}x\right|$を$\lambda_L/L$で整理した図を描けばすぐに理解できる。

ポイント#8　Pitch 運動の応答関数の特徴

低速では正面向い波よりも斜め向かい波の方が pitch 角は大きく、高速だと正面向い波の方が pitch 角は大きくなる

＜ハンズオン演習＞

・船速を 0kt, 5kt, 10kt, 15kt, 20kt と 5 ケース選択して応答関数を出力し、結果画面で[Data series]を[Ship Speed]として向い波$\chi = 180°$、斜め向い波120°、横波90°、追い波0°における heave と pitch の応答関数を並べてみよう。結果を予想して、考察してみよう。

・船速を 0kt, 5kt, 10kt, 15kt, 20kt の 5 ケース、波向きを$\chi = 90°, 120°, 150°, 180°$、かつ[Wave Length]を$\omega_e$として$\omega_e = 0.05$~$1.5$（0.05 刻み×30 ケース）で計算してみよう。計算結果で[Data series]を[Wave Direction]あるいは[Ship Speed]とした場合の heave, pitch 運動をプロットし、応答関数の形状が何に支配されているのかを考察してみよう。

3.3. Roll 運動

まず roll 運動の応答関数を表示してみる。すると、長波長にゆくほど振幅が大きくなり続けていることが分かる。

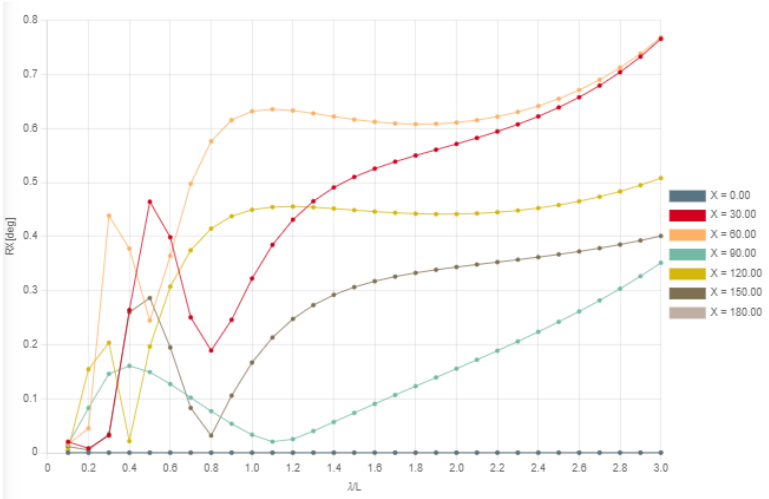


図 3.9 波向きごとの roll 運動の応答関数（$\lambda/L < 3.0$）

この理由は、コンテナ船はコンテナという軽貨物を高く積むため重心が高く、roll の同調周期が非常に長くなり、それが$\lambda/L < 3.0$の範囲に含まれていないためである。そこで、λ/L

を十分大きな値までとって再度計算を行うことにしよう[8]。

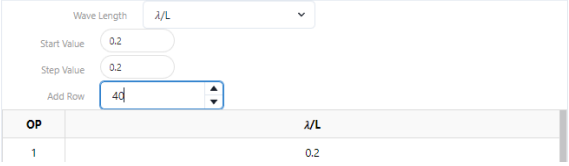
まず、同調周期を生じる波長を推算する。実は、波長が決まれば波の速度（位相速度）は唯一に定まることから，波長と波周波数は 1 対 1 の関係にあることが知られている。その関係は分散関係と呼ばれ、次の式の通りである。

ポイント#9　波長と波周波数の関係式（分散関係）

波長λ[m]と波周波数ω[rad/s]（波周期T[s]）は 1 対 1 の関係にあり、重力加速度$g = 9.8$[m/s^2]を使って次のように変換できる

$$\lambda = 2\pi g/\omega^2 = gT^2/2\pi$$

本コンテナ船($L = 284$m)の roll 固有周期は 30 秒程度なので、$\lambda/L \cong 30^2 g/2\pi/284 \cong 5.0$ 付近でピークとなる。よって、λ/Lを 0.2 刻みで$\lambda/L = 8.0$まで含めて計算してみよう[9]。



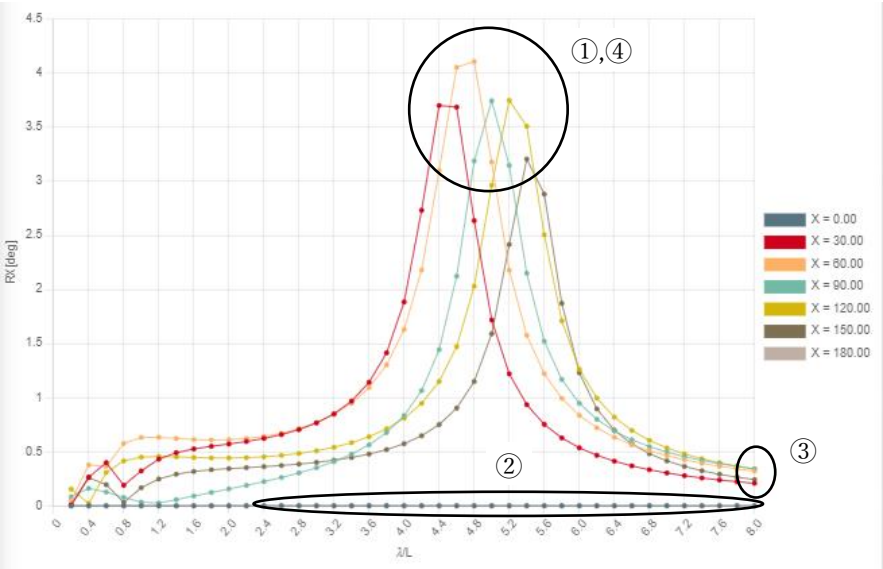


図 3.10 波向きごとの roll 運動の応答関数（$\lambda/L < 8.0$）

---

[8] 応答関数でどこまでの波長を含めるかについては特に決まり事は無い。設計に用いる分には、実際に遭遇する波長域（波長600m程度，波周期約 20 秒まで）を含んでいればよいという考えのもと、$\lambda = 600$mまであれば普通は十分であるといえる。ただし、今回のように応答の特徴を観察するという目的からは、状況に応じて波長域を変更すればよかろう。

[9] λ/Lの長いところでは roll 以外の応答の変化はほとんどなく、計算時間やデータ数が無駄に増えてしまう。そういう場合には、波周波数ωあるいは$\sqrt{L/\lambda}(= \omega\sqrt{L/2\pi g})$を横軸に用いるのが便利である。$\lambda/L$の逆数であるため横軸が逆になって少しわかりづらくなるかもしれないが、$\sqrt{L/\lambda} = 0.2$~3.0の範囲で$\lambda/L = 0.11$~25と幅広い波長を含むことができる。

この応答関数を見ると、ほかのどの運動よりも同調による顕著なピークがみられる。これについて考察していく。

①なぜ roll 運動はピークの山が高いのか

答えをいうと、roll 運動は他の運動よりも減衰力係数（運動に抵抗する力の強さ）が小さいためである。船体運動はバネ・ダンパ・マス系に置き換えることができ（付録 6.1, 6.2)、ダンパの減衰力係数が大きいほど運動は急速に減衰する。減衰力係数とは“運動エネルギーの減少度合い”を表すものとイメージしておけばよい。そして船体運動の場合は、船の運動エネルギーが、船の運動によって造られる波のエネルギーに変換される割合の高さが減衰力係数に対応する（そのため**造波減衰力係数**と呼ぶ)。すなわち、大きな波が生じる運動ほど、エネルギーが波に奪われ、運動が抑えられるのである。そして、

ポイント#10　運動の応答関数のピークの大きさ

・Pitch, heave 運動で造られる波は大きく、roll 運動で造られる波は小さい

・よって pitch, heave 運動に比べ roll 運動の造波減衰力係数は小さく、同調周期で大きな運動が生じる

のである。Roll 運動による波が小さいのは、船の側面と底面の造る波がキャンセルする関係にあるためである。そこで、roll 運動が大きくなりすぎるのを防ぐために、船にビルジキールを取り付けることによって粘性・造渦による減衰力を高めるのである。この影響についてはすぐ後で説明する。

② 向い波および追い波での roll 運動

向い波$\chi = 180°$および追い波$\chi = 0°$では roll 運動は完全にゼロである。その理由は、これらの波向き（合わせて**縦波**と呼ぶ）では、左右対称の船では完全に左右対称の力が作用し、roll モーメントがゼロになるためである。逆に、pitch 運動が横波$\chi = 90°$で完全にゼロにならない理由は、船が前後非対称なので前後非対称な力が作用し、若干の pitch モーメントが生じるからである。

③ 長波長域での漸近値

Pitch 運動と同様の理由で、roll 角は長波長域で”船幅方向の波傾斜角”に一致する。波傾斜角で無次元化した値を出力すると、$|\sin\chi|$（χは波向き[rad]）に一致する値に漸近する。

④ 波向きによってピークの山がずれる理由

この原因はやはりドップラー効果である。船速をゼロにして計算してみると、波向きによらず同じλ/Lでピークをとることが確認できる。船速が有る場合は、(斜め) 向い波では同じ

波長でも出会い波周期が短くなるため、同調を起こす波長は長くなる。逆に追い波では同調を起こす波長は短くなる。

＜減衰力の非線形性について＞

続いて、波高を変えて計算してみよう。上の計算と同じ波長船長比・波向きで、波高を 2m, 6m, 12m, 18m と 4 ケース選択し、計算を再度実行してみる。そして結果の画面で[Data Series]を[Wave Height]に、波向きを[χ=90]にして波高毎の roll の応答関数を見てみる。左は roll を degree で出力したもの、右は波傾斜角で除した無次元値で出力したもの（ここでは”波振幅で割ったもの”と考えてよい）である。

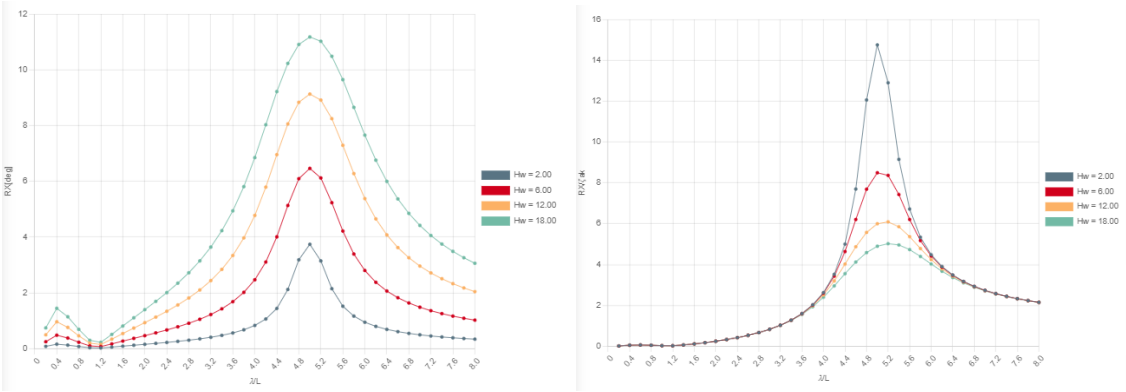


図 3.11 横波$\chi = 90°$における波高ごとの roll 運動の応答関数（左：degree, 右：波傾斜角で除した無次元値）

左の図より、波高を大きくするほど roll 角は大きくなる傾向にあることが分かる。これは当然であろう。一方、右の図より、roll 角を波傾斜角で除した無次元値は、同調周期付近において、波高が高いほど小さくなっていることが分かる。

この考察の前に、roll 以外の運動を見てみよう。Heave, pitch 運動などの無次元値を見ると、波高によらず全く同じ値となっていることが分かるだろう（下図）。これは heave, pitch 運動が波高に比例していることにほかならず、”船体運動が波高に比例する”という線形解析において前提としている仮定を表す結果である。Sway, yaw 運動が波高によって若干変化しているのは、これらは roll 運動と連成する（roll の影響を受ける）ためである。

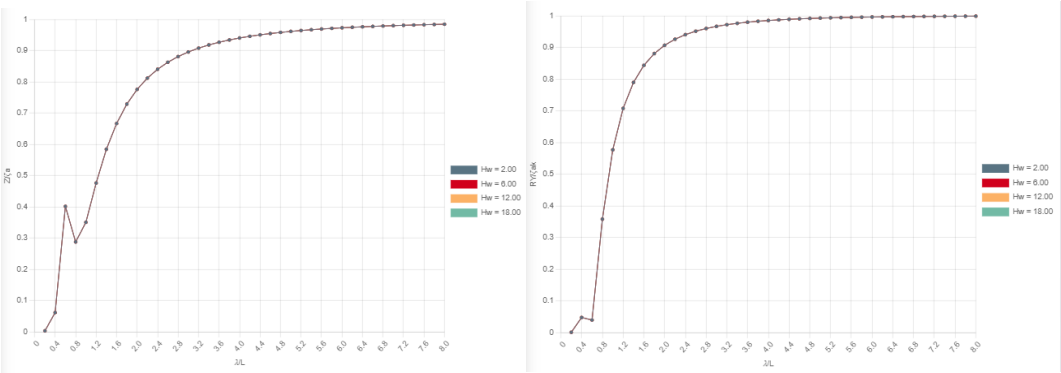


図 3.12 向い波$\chi = 180°$における波高ごとの heave (左), pitch (右)の無次元応答関数

これを踏まえて再度図 3.11 の roll 運動の無次元応答関数を見ると、”roll 運動は同調周期付近で波高に比例していない”ということが分かるだろう。これは roll の減衰力の**非線形性**（波高に比例しないという性質）から来るものである。これは、上述したように roll の造波減衰力が小さく、非線形減衰力が主要となることに由来している。つまり

ポイント#11　Roll 運動の非線形性

- Roll 運動は(**ポイント#10** より)造波減衰力が小さく、相対的にビルジキールによる粘性や造渦による減衰力の影響が大きくなる
- 造波減衰力は線形（波高に比例する）だが、粘性や造渦による減衰力は非線形（波高に比例しない）である
- したがって roll 運動は波高に比例せず、特に減衰力の影響が大きく表れるピーク付近で波高依存性が顕著になる

一般に、波高が高くなるほど roll の非線形の減衰力係数が大きくなる傾向にあり、減衰力の効きは波高の傾向に増して強くなる。よって、波高が高くなるほど roll 運動の無次元応答関数のピークは抑えられることになる。

Roll の非線形の減衰力については、ストリップ法やパネル法の理論の枠組みでは計算することができない。そこで、別途 roll の減衰力係数に関する情報を入力する必要がある。そして roll の減衰力係数は船速に依存することが知られているため、本アプリでは船速ケースごとに**減減係数 a, b** を入力することになっている。a が波高（正確には roll 角速度）に比例する線形成分、b が波高の二乗に比例する非線形成分の係数である。これらの値は設計便覧に記載の簡易式や、模型船を用いた自由横揺れ試験による計測値を入力するのが一般的である。最も簡単な推定値（相場）として、a=0, b=0.02 と入力することも多い。

OP	kt	a (Linear coef. of roll ex...	b (Nonlinear coef. of ro...
1	5	0	0.02
2	20	0	0.02

＜ハンズオン演習＞

線形減滅係数 a=0.4、非線形減滅係数 b=0 にして、上と同じ波高別の無次元の roll の応答関数を表示（波高を 2m, 6m, 12m, 18m と 4 ケース選択し、結果画面で[Data series]を[Wave Height]として表示）してみよう。

3.4. Surge, sway, yaw 運動

最後に、surge, sway, yaw 運動をまとめて簡単に説明する。これらの運動は、すでに説明した heave, pitch, roll 運動と比べて重要性は低い。なぜなら

> **ポイント#12　復原力の無い運動**
>
> Surge, sway, yaw 運動は船の上下移動を伴わないため、静水圧・浮力が変化せず、したがって**復原力**（バネの働きをする力）が存在しない。それゆえ同調現象は生じない

ためである。同調現象が生じないので過大な運動は起こらず、考察すべき点も多くない。

I)　Surge, sway 運動

これらの水平方向運動の応答関数は明確なピークを持たない。したがって長波長域の挙動についてのみ述べる。

長波長域では、すでに述べたように“船が波に乗る”状態になるのであった。そして、波の粒子の運動は円軌道であるので、船も波向き方向に円運動を描く。よって surge 運動の振幅は長波長域で$\zeta_a|\cos\chi|$（縦波で波振幅に一致、横波でゼロ）に、sway 運動は$\zeta_a|\sin\chi|$（横波で波振幅に一致、縦波でゼロ）に漸近することが直ちに言える。なお、船が円運動することは、heave との位相差を見れば理解できる。[RAO Phase]を表示して位相を表示してみると、heave との位相差は 90°となっていることがわかる。位相差が 90°でかつ振幅が同じなので、これは円運動に他ならない。

II)　Yaw 運動

Yaw 運動については、roll, sway と同様、縦波($\chi = 0°, 180°$)では左右対称の力しかかからないため完全にゼロであるのに加え、横波($\chi = 90°$)でもほぼゼロになる。これは横波で前者対称の力がかかっても yaw モーメントはほとんどゼロになるためである（ただし、roll の

同調周期付近では roll の連成影響によって多少の yaw 運動が生じる)。したがって yaw は斜め波でしか運動せず、そしてその大きさも pitch 角と比べて大きくならない。

Yaw がピークをとるのは斜め波($\chi = 60°, 120°$)の$\lambda/L = 0.6$~0.8付近であるである。その理由は、単に波から受ける yaw モーメントが大きくなるためである。Yaw 方向のモーメントが生じるには左右非対称な力が船首・船尾で反対方向に作用する必要にあるのだから、波傾斜の強い短波長域で、波の山/谷が船首、かつ波の谷/山が船尾に位置するような状態で最大となることはイメージできよう。

3.5. 運動加速度

以上で説明したのは 6 自由度運動による移動量（角度)、すなわち運動変位である。運動変位が分かれば、運動加速度もすぐに分かる。運動は全て出会い波周波数ω_eで動揺するのであったのだから、次のように表される。

$$x(t) = A\cos(\omega_e t + \varepsilon)$$

そして、加速度は 2 階の時間微分であるので

$$\ddot{x}(t) = -\omega_e^2 A\cos(\omega_e t + \varepsilon)$$

となる。運動加速度の振幅は、運動変位の振幅に"$-\omega_e^2$"を掛けるだけであるので、運動加速度の応答関数は運動の応答関数の傾向を短波長ほど大きくし、長波長ほど小さくしたような傾向となる。

＜ハンズオン演習＞

・船速を 0, 5, 10, 15, 20kt の 5 ケース、他は通常（$\chi = 0$~$180°$、$\lambda/L = 0.1$~3.0）にして計算し、[MOTION ACCELERATION]から heave, pitch 運動加速度の向い波および追い波での応答関数を船速別で表示（[Data Series]で[Ship Speed]を選択）してみよう。運動変位の応答関数との違いについて考察してみよう。

3.6. 船体固定座標系の加速度

前節で説明した運動加速度は、6 自由度運動に対応した、空間固定座標系での加速度である。一方、乗客や貨物が実際に感じる加速度は**船体固定座標系の加速度**であり、安全性を評価する上ではそちらの方が重要である。

船体固定座標系における加速度は船にとりつけた加速度計が検出する加速度と考えてよく、空間固定座標系における加速度との違いは主に"重力加速度方向の傾きを考慮するか否か"にある[10]。重力と加速度が何の関係があるのだろうか？と思うだろが、そのために次の思

[10] 船の姿勢が大きく変化することで空間固定/船体固定座標系の加速度の向き自体が変わるという効果があるが、その効果は波高の二乗以上に比例する高次項つまり影響の小さな項であるため、線形解析では無

考実験をしてみる。船が右に傾斜すると、船から見て重力は右方向に作用するように感じる。そして船の中から外を眺めることのできない場合、中にいる人や計測器は、その力が運動加速度による慣性力なのか、重力によるものなのかを判別できない（等価原理）。よって船にとりつけた加速度計は重力を右向きの慣性力として検知するため、”左向き”の加速度として検出される。これを船体固定座標系の加速度と考えるのである。つまり、次のように考える。

ポイント#13　船体固定座標系での加速度

・重力を、鉛直上向きの重力加速度g=9.8[m/s^2]が作用しているときの慣性力とみなす
・船体固定座標系での加速度は、運動による加速度に加え、船体の傾斜による重力加速度の変化分も考慮する

このように、重力を慣性力の一種とみなして運動加速度と重力加速度を混同することは、“そう考えると慣性力と重力をまとめて計算できるので便利だから”と解釈してもよいが、実は歴然たる物理的事実である[11]。

よって、ある位置における船体固定座標系の前後・左右加速度は、6 自由度の運動加速度と船体傾斜角（roll, pitch）から

$$(\text{重心の並進加速度}) + (\text{回転加速度}) \times (\text{重心からの距離}) + \underline{g \times (\text{船体傾斜角})}$$

のように計算される。最後の下線部の項は、船体固定座標系でみたとき特有の項である。なお、上下加速度については、傾斜による重力変化は無視できるとみなされ、下線の項は無く船体固定座標系は空間固定座標系と同じ値になる[12]。

＜ハンズオン演習＞

通常の条件（$\chi = 0{\sim}180°$、$\lambda/L = 0.1{\sim}3.0$）で計算し、結果の[POINT ACCELERATION]から[PARAMETERS]タブで指定した 3 点（Pt 1: 船尾, Pt 2: midship, Pt 3:船首）での前後・上下・左右加速度の応答関数を見てみよう。船首位置での上下加速度、midship 位置での左右および前後加速度の応答関数が、それぞれ 6 自由度運動変位/運動加速度のうちどの応答関数との相関が強いか、予想しつつ、確認してみよう。

視される。また、船が回転運動することによる遠心力やコリオリ力なども作用するが、これらも高次項なので、やはり線形解析では無視される。

[11] ニュートン力学では、重力$F = mg$のmを重力に比例する「重さ」、慣性項maのmを物体の動かしにくさを表す「質量」と読んで、区別される。ニュートン力学ではこれらが一致する必然性はどこにも無く、一致するのは偶然とされていた。しかしながら、一般相対性理論により重力の考え方が見直され、これらは全く同一の量だということが判明した。つまり、“gは座標系の加速度aと本質的に同じであり、重力は地球の質量による時空間の歪みによって地面が9.8[m/s^2]で上昇していることで生じる”と解釈される。

[12] 前後・左右加速度の重力加速度の項は本来$g \times \sin$(船体傾斜角)であるが、$\sin\theta \cong \theta$のように線形化される。上下加速度については、本来$g \times (1 - \cos$(船体傾斜角))であるが、やはり$\cos\theta \cong 1$と線形化されることによって無視される。

4. 波浪中ハルガーダ断面力の応答関数の特徴を捉える

構造設計にとって特に重要となる、波浪中のハルガーダ断面力について説明する。しかし残念ながら、波浪中のハルガーダ断面力は波浪外力に加えて船体運動による慣性力・流体力といった様々な要因が絡むため、その傾向は船体運動よりも複雑であり、完全に理解することは難しい。ただし、いくつかの重要な特徴はイメージで説明がつくので、それらについてはぜひ習得しておきたい。

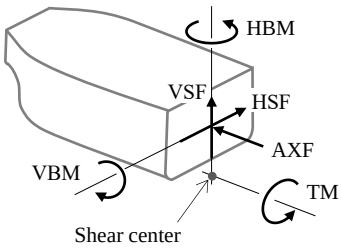


図 4.1 Web アプリにおける 6 種のハルガーダ断面力の定義

4.1. 力のつり合いとハルガーダ断面力

個々の応答関数の説明に入る前に、波浪中の船体梁に作用するハルガーダ断面力について、その一般的な物理的イメージを掴んでおこう。

それにはまず、次の材料力学の大原則を念頭に置いておきたい。

ポイント#14　仮想切断された物体の力のつり合い

外力を受け（並進・回転方向に）釣り合い状態にある物体を任意の位置で仮想的に切断すると、切断後の 2 つの物体それぞれで、外力と**仮想断面**にかかる**内力**とが釣り合う

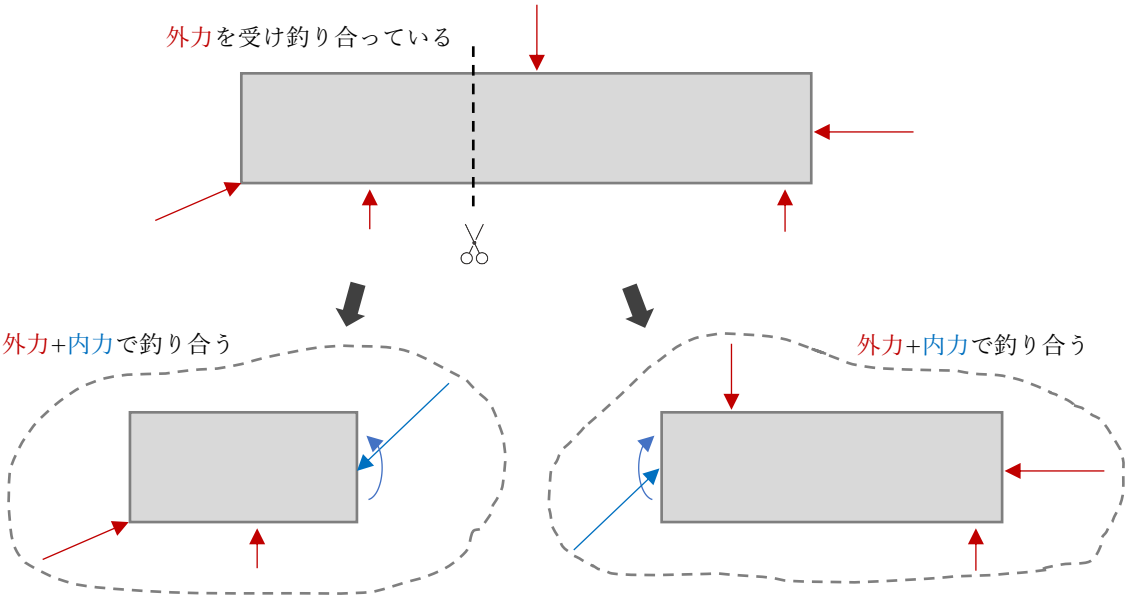


図 4.2 仮想断面にかかる内力と外力のつり合い

つまり、仮想断面に働く内力は、仮想切断した後の物体にかかる外力と釣り合うように発生するともいえる。そして、ハルガーダ断面力は船体梁を任意の横断面で仮想切断したときの仮想断面にかかる内力であるから、

> **ポイント#15　力のつり合いによるハルガーダ断面力の定義**
> ハルガーダ断面力はその横断面から船首側（あるいは船尾側）の船体に作用する全ての外力の合力と反対の力（モーメント）として定義される

ことが分かる。船長、左右、上下方向の並進力およびモーメントの釣り合いから 6 つの断面力が定義される（図 4.1）。もちろん、仮想断面にかかる内力（応力）の積分値としてもハルガーダ断面力を定義できるが、**ポイント#14** で述べた性質から、外力の積分による定義も内力の積分による定義も、全く同じ量を示す。

4.2. 波浪中のハルガーダ断面力の考え方

静水中で静止している船体には、船殻＋貨物にかかる重力、外板にかかる浮力の 2 種類の力が作用している。したがって 2.2 節で説明したとおり、これらの力を横断面から船首側あるいは船尾側に積分することで、静水中の VBM, VSF を求めることができる。

では、波浪中で船体が運動している場合はどうだろうか？それには、次の**ダランベールの原理**を適用すれば簡単に考えることができる。

> **ポイント#16　ダランベールの原理**
> 外力をうけ加速運動をしている物体は、物体固定の座標系でその物体を見たときに見かけ上作用する“慣性力”を含めることで、つり合い状態にあるとみなせる

これは、外力Fを受ける運動方程式$m\ddot{x} = F$において、$m\ddot{x}$を右辺に移して”$-m\ddot{x}$”を外力とみなすことを意味する：

$$m\ddot{x} = F \quad \leftrightarrow \quad 0 = -m\ddot{x} + F$$

見かけ上の外力$-m\ddot{x}$を**慣性力**と呼び、加速度と逆向きでかつ質量に比例する力である。この運動方程式は質点のものであり、対して船は剛体（連続体）であるが、剛体も質点の集合体だと捉えれば同じことである。そしてこの原理をもって、以下が言える。

> **ポイント#17　波浪中のハルガーダ断面力の考え方**
> 波浪中の船体を船体固定座標系から見て静止状態とみなし、慣性力を外力の 1 種として追加で考慮することで、静止時と同じように計算できる

本節冒頭の材料力学の原則に“釣り合い状態にある物体を～“と但し書きがされているが、実はどんな外力状態であっても慣性力を含めることで釣り合い状態にあるとみなせるので、この但し書きは何の制限も課してはいないのである。あとは静水中と同様に、外力（重力＋浮力＋波浪による外力＋慣性力）を横断面から船首/尾まで積分すれば、波浪中のハルガー

ダ断面力を求めることができる。

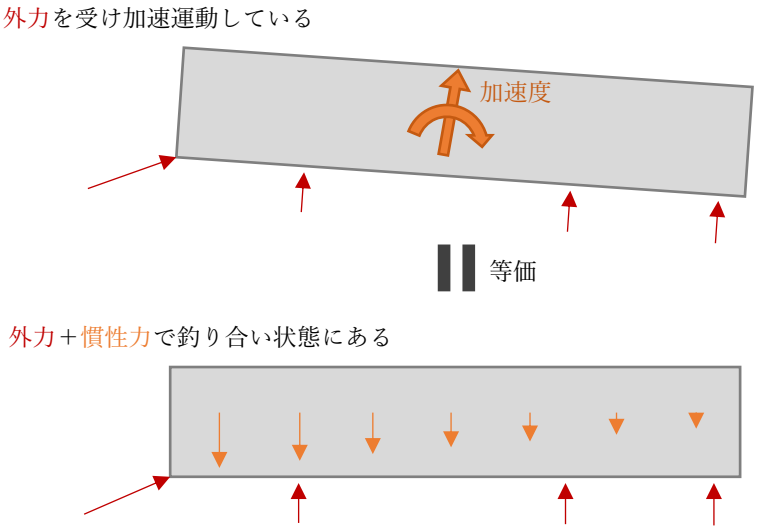


図 4.3 ダランベールの原理

波浪中の船体に働く慣性力の一般的な性質として、次の重要な性質を説明しておきたい。

ポイント#18　慣性力と波浪外力の関係

船全体の傾向として、慣性力は波浪外力と逆方向に作用しキャンセルする関係にある

このことは、波浪外力によって船体がその作用方向に加速度運動し、慣性力は加速度と逆向きにはたらくことから理解できる。“船体全体の傾向として”と断ったのは、局所的にみるとキャンセルしない箇所もあるからである。これは当然のことで、波浪外力の分布は一様ではないし、慣性力も質量に比例するため重量物のある箇所で集中的に作用する。ただし、船体運動やハルガーダ断面力というマクロなスケールで見たときに慣性力と波浪外力が打ち消しあう関係にあることは確かで、このことは応答関数を理解する上で重要な性質である。

4.3. 垂直曲げモーメント

結果の[WAVE LOAD]タブから、[Load Component]を[Vertical Bending Moment]にして VBM の応答関数を表示してみよう。横軸は[Horizontal Axis]から[Wave Length]、[Section]のどちらかを選べる。以下に、横軸をλ/Lとした波向き毎の応答関数と、向い波で横軸を section とした場合の船長方向分布を示す。

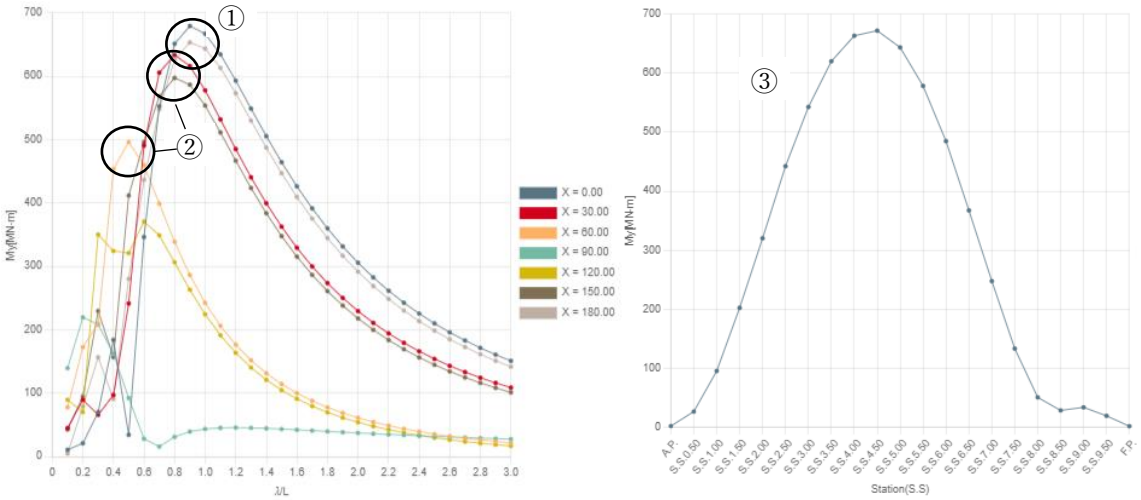


図 4.4 VBM の応答関数（左：横軸 λ/L、midship 断面、波向き毎、右：横軸 section、向い波$\lambda/L = 1$）

① 向い波の$\lambda/L = 1$付近

一般に、向い波の$\lambda/L = 1$付近で VBM が最も大きくなる。これは説明不要かもしれないが、以下のように、船長にわたって波の山・谷・山がくるときに hogging モーメントが大きく、逆に谷・山・谷がくるときに sagging モーメントが最大となるためである。

図 4.5 向い波、$\lambda/L = 1$のときの VBM

応答関数をよく見ると、VBM のピークは$\lambda/L = 1$ではなく$\lambda/L = 0.9$となっている。これは、実際の船は船首尾が痩せているので“船長がLよりやや短い箱船”とみなせるためである。つまり、痩せた船型の船ほど VBM のピーク波長は（若干ではあるが）短くなる傾向にある。

さて、計算条件を変化させたときの VBM の応答関数の変化については演習に預けることにするが、そこから分かるのは“VBM に対して大事なのは出会い波周波数などの運動力学的要素ではなく、波の幾何学的要素である波長λ”だということである。その理由も添えて、以下に強調しておく。

ポイント#19　波浪中 VBM の特徴

・VBM にとって重要なパラメータは波長で、向い/追い波の$\lambda/L = 1$付近で最大になる

・VBM は船体運動との相関は強くない。一般に運動が大きいほど流体外力も慣性力も大きくなるが、両者がキャンセルする関係にあるためである

② 斜め波でのピーク

斜め波では、pitch と同じく、図 3.8 の船長方向波長$\lambda_L(=\lambda/|\cos\chi|)$が重要なパラメータとなることは明白だろう。つまり、斜め波では$\lambda_L/L=1\leftrightarrow\lambda/L=\cos\chi$（より若干短い波長）でピークとなる。

③ VBM の船長方向分布

VBM は通常船長方向に 1 つ山の分布になり、midship (SS 5.0)付近で最大となる。船首・船尾では必ずゼロになるが、これは 2.2 節で述べたとおり、船の両端が自由端だからである。

コンテナ船は船首の方が痩せているので船首付近で受ける力が小さく、山のピークは midship より後ろ側に寄る傾向にある。また、船速が速いと、船首の方にかかる力が大きくなるため山のピークは前側に寄る傾向にある。

＜ハンズオン演習＞

船速を 0~20kt で変化させたときの向い波の VBM の応答関数の変化を調べ、heave/pitch 運動加速度の変化と比べてみよう。Heave/pitch 運動加速度は大きく変化しているのに対し、VBM の変化は小さく、波の幾何学的パラメータである波長λが支配的であることが分かるだろう。

4.4. 垂直せん断力

垂直せん断力（以下 VSF）は VBM の船長方向微分であるため、VSF の応答関数の（λ/Lと波向きに対する）形状は殆ど VBM と同様の傾向を示す。よって、ここでは船長方向分布の特徴のみを説明する。

以下に、横軸を section として、向い波、$\lambda/L=1.0$における VSF の振幅と位相の分布を示す。

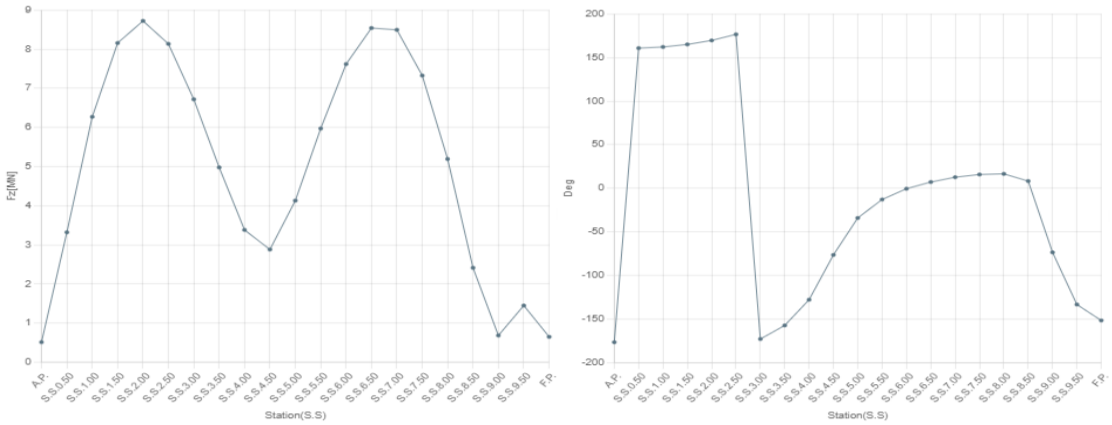


図 4.6 向い波$\chi=180°$, $\lambda/L=1.0$の VSF の振幅（左）および位相（右）の船長方向分布

VSF の振幅は VBM と異なり、station 2.0, 7.0 付近で大となる二つ山の分布となっている。そして、2 つの山の位相関係は、およそ逆位相（180°差）となっている。この傾向を理解するには、振幅・位相ではなく、時間変化を表示した方がよい。以下に、1 周期を 12 分割した時々刻々の VSF の分布を示す（[Download]ボタンから[RESULTS]フォルダを選択して得られる HisVSF~.csv ファイルから表示可能）。

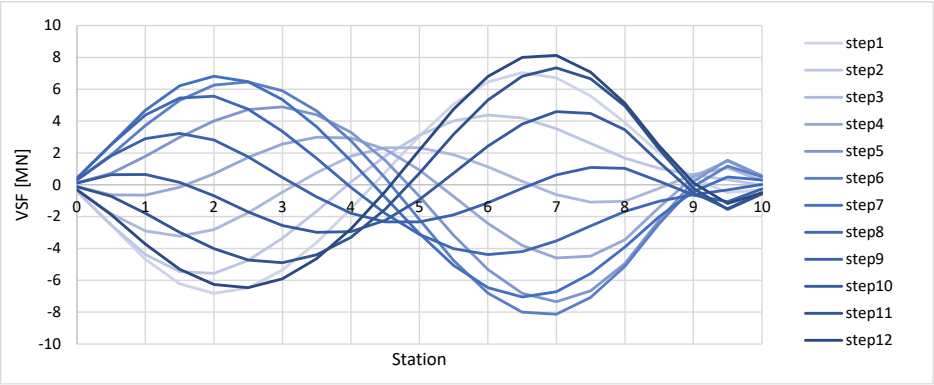


図 4.7 向い波$\chi = 180°$, $\lambda/L = 1.0$の VSF の船長方向分布の時間変化

この図を見ると、VSF は sin カーブに近い分布で時間変化しており、2 つの山は同時刻で互いに逆向きになることが分かる。図 4.6 にみえる振幅の二つ山は、この包絡線なのである。分布が sin カーブ形状になる理由は、VBM が 1 つ山で、VSF はその微分であることから理解できる。また、2.2 節で説明した、“VSF はどの瞬間でも正と負の面積が必ず等しくなる”という性質からも理解できよう。VSF が正方向に大きくなるためには、同時に別の場所で負方向にも大きくなる必要があり、結果 sin カーブのような形状しか取りえないのである。

2.2 節の内容と重複するが、波浪中の VBM, VSF の分布についての重要な特徴を以下にまとめておく。

ポイント#20　波浪中 VBM, VSF の船長方向分布の特徴

- 時々刻々の船長方向分布に対し、VBM の微分が VSF になる（振幅の分布に対しては成り立たない）
- 船は両端自由端なので全てのハルガーダ断面力は両端で必ずゼロになる
- VSF は正側の面積と負側の面積が必ず同じになる
- 以上の性質から、VSF が大きくなる瞬間の分布は sin カーブ形状にしかなりえず、VSF の振幅分布（包絡線）は 2 つ山になる

4.5. 捩りモーメント

捩りモーメント（以下 TM）については、“どの点まわりの TM か”が重要になる。構造応答評価には捩り変形に直結する”せん断中心まわりの TM”が重要であるが、傾向を理解するのに適した”重心まわりの TM”についても示す。

本アプリでは、せん断中心まわりの TM が計算され、せん断中心は[HULL OFFSET WEIGHT]から横断面ごとに入力される。GC [m]は重心-せん断中心距離を意味し、0 とした場合は重心まわりの TM が出力される。

No.	Station	X (from MS) [...	wt [ton/m]	OG (=d-KG) [m]	GC [m]	kxx/B
1	S.S.-0.26	-149.299	264.716	-7.839	0	0.39363
2	S.S.-0.13	-145.601	264.716	-7.839	0	0.39363

以下に、station7.0 での重心まわりの TM の応答関数を、$\lambda/L < 8.0$の範囲で示す。

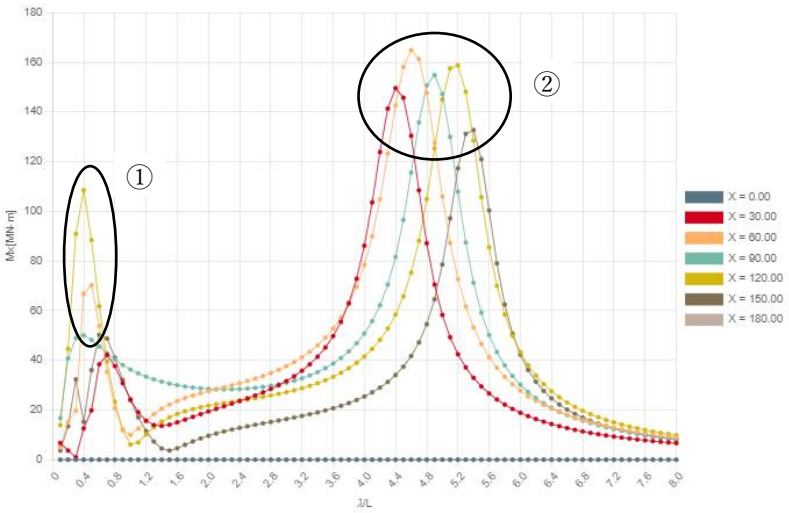


図 4.8 波向き毎の station7.0 における重心まわりの TM の応答関数

① $\chi = 120, 60°, \lambda/L = 0.4$付近

斜め波の短波長で、TM はピークをとっている。この波条件では、以下の図のように船首と船尾で波の傾斜が逆向きになり、雑巾絞りの状態となるためである。これは波の幾何学的形状に起因するものであるので、TM の応答関数は船種によらずこの波条件でピークを持つ。

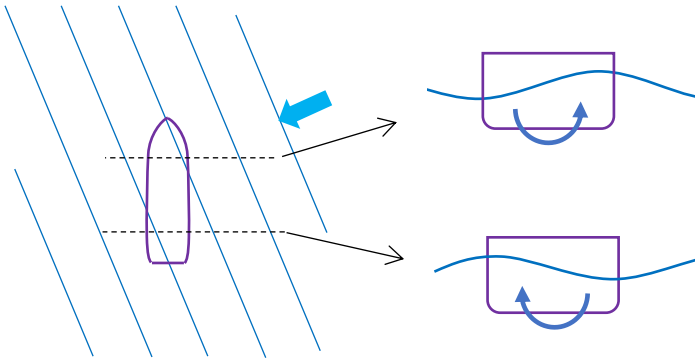


図 4.9　短波長斜め波において船体に生じる捩りモーメント

② $\lambda/L = 5.0$付近

長波長$\lambda/L = 5.0$付近に見られる TM のピークは、roll 運動の応答関数とそっくりであることから分かるように、横傾斜に起因するものである。単純な横傾斜で TM が発生する理由は、横断面ごとに復原モーメントの強さ（メタセンタ高さ）が異なるためである[13]。断面のメタセンタ高さは、水線幅が広く、底が浅いほど（かつ断面重心が低いほど）大きい。すなわち、船長方向に船型変化の激しい痩せた船ほど、roll によって大きな TM が生じる。逆を言うと、船長方向に一様な船は横傾斜しても TM は発生しない。

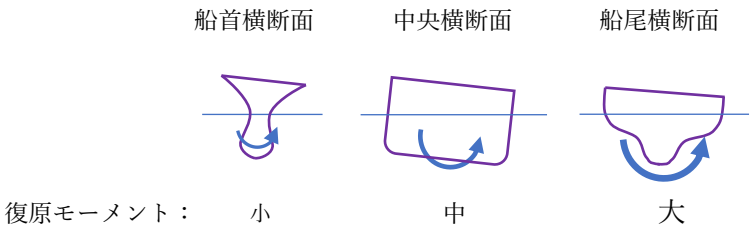


図 4.10　横傾斜したときに各横断面に作用する復原モーメント

次に、TM の船長方向分布を見てみる。左は、重心まわりの TM の分布、右はせん断中心まわりの TM の分布である。コンテナ船なので、せん断中心はキールよりも下（約 10m）の位置にある。

[13] 正確には、船全体では復原モーメントと同量かつ逆向きの慣性力によるモーメントがかかるので、両モーメントの分布の差分が捩りモーメントを発生させる。慣性力によるモーメントの船長方向分布は各断面の横環動半径から計算されるが、一般にこの情報を得ることは難しく、一様な環動半径（すなわち慣性モーメント分布は重量分布に比例）を用いることが多い。本アプリでは、断面の横環動半径は[HULL OFFSET WEIGHT]の section 欄の右端にある[kxx/B]から入力できる。

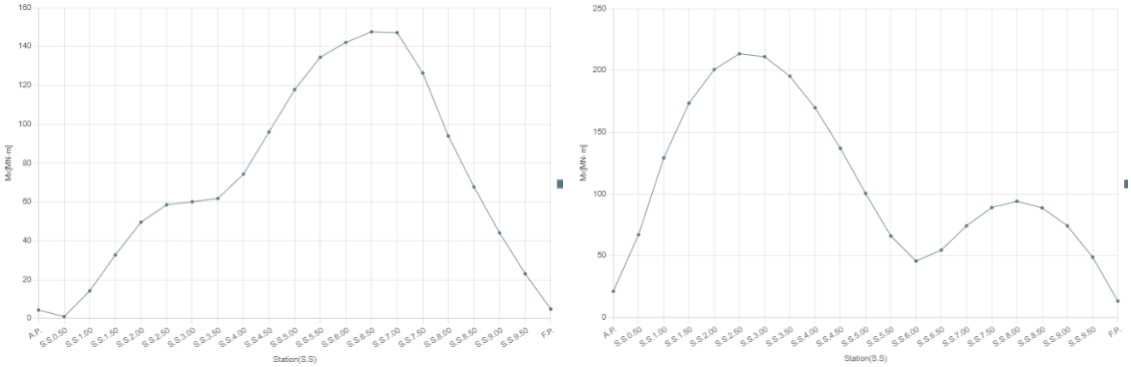
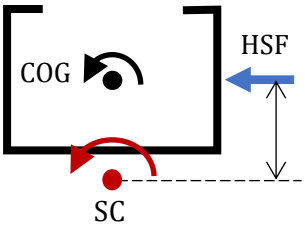


図 4.11　$\chi = 120°, \lambda/L = 0.4$ における重心まわり（左）およびせん断中心まわり（右）の捩りモーメントの船長方向分布

左の図を見ると、重心まわりの TM はおおむね 1 つ山である。これは図 4.9 に示したイメージ通り、船が雑巾絞りの状態であると解釈してよい。山のピークが前方に寄っているのは、主に船型が前後非対称に起因している。

一方、右の図を見ると、せん断中心まわりの TM は、重心周りの TM と全く異なる傾向を示し、2 つ山でかつ後方の方が大きい。この理由は、せん断中心まわりの TM が

$$\left(\text{せん断中心まわりの TM}\right) = \left(\text{重心まわりの TM}\right) + \underline{\left(\text{水平せん断力}\right) \times \left(\text{重心高さ} - \text{せん断中心高さ}\right)}$$



と表されるからである。右辺の第 2 項は（水平せん断力）×（レバー）で、コンテナ船は特にレバーが大きいので、水平せん断力 HSF の影響が大きく表れる。そして HSF の分布は以下の通り、VSF と同様の理由で、2 つ山を示す。

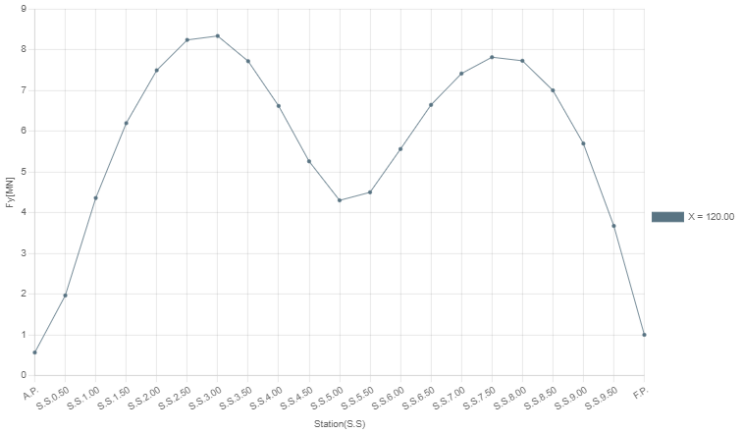


図 4.12　$\chi = 120°, \lambda/L = 0.4$ における HSF の船長方向分布

よって、図 4.11 右のせん断中心まわり TM の 2 つ山は、HSF の 2 つ山から来ているの

である。そして VSF, HSF と同様、せん断中心まわりの TM も瞬時瞬時で見ると sin カーブの形状になる。つまり、実際に生じる捩り変形は船体中央付近で比較的小さく、捩じり方向は船首と船尾で逆向きになるのである。なお、図 4.11 右で後方の山の方が大きいのは、重心まわりの TM と HSF とが、後方の山では同位相で強め合い、前方の山では逆位相で打ち消し合っているためである。

以下の図は、短波長斜め追い波におけるばら積み船の全船 FEM モデルの変形図である（ばら積み船も開断面なのでレバーが大きく、コンテナ船と同様の傾向を示す）。この図から、捩り変形が中央断面で小さく、捩じり方向が途中で逆向きになっていることが確認できる。「斜め波短波長で船体は雑巾絞りのように捩れる」といったイメージがよくされるが、実はそれはせん断中心が重心に近いタンカーのような閉断面の船の場合のみで、大きな開口を有する開断面の船体では、このように途中で捩りの向きが逆になるのである。

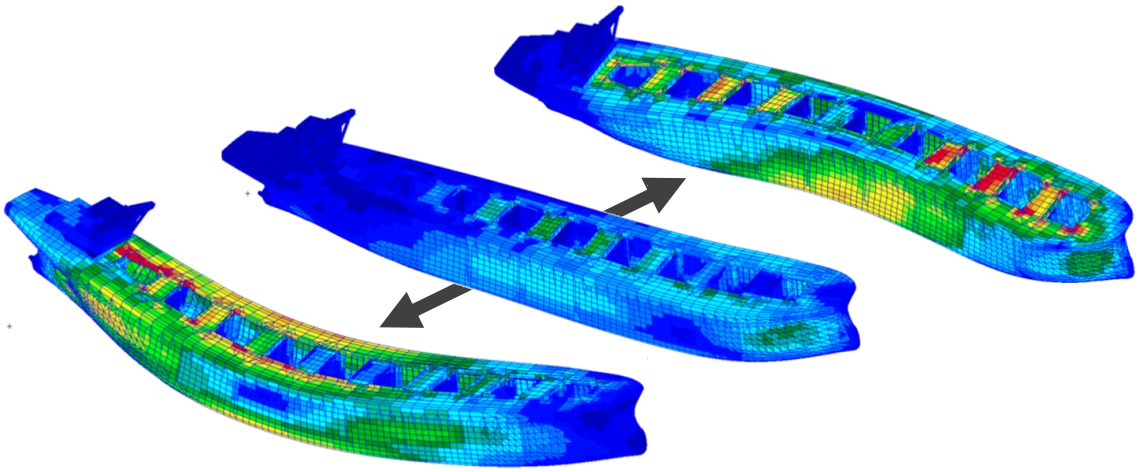


図 4.13　短波長斜め追い波($\chi = 60°$, $\lambda/L = 0.5$)中のばら積み船 FEM モデルの捩り変形
雑巾絞りではなく、捩りの向きが途中で逆になっている

以下に、波浪中の TM に関する特徴をまとめる。

ポイント#21　波浪中捩りモーメントの特徴

- TM の応答関数は、短波長斜め波での波形状に起因するピークと、roll 運動に起因するピークの 2 つのピークを持つ
- Roll 運動に起因する TM のピークは、roll 運動の大きさに加え、船長方向の船体形状変化の激しい痩せた船ほど大きく表れる
- 開断面の船はせん断中心がキールより下方にあるため、せん断中心まわりの TM は HSF の影響を強く受ける。したがってせん断中心まわりの TM の船長方向分布は VSF や HSF と同様に sin カーブになり、船の捩り変形は船の前後で逆向きになる。かつ、包絡線である振幅の船長方向分布は 2 つ山になる

5. 短期・長期予測を理解する

ここでは、短期・長期予測が何を根拠に、何をどのように計算しているかを説明する。この章を読み終えるころには、短期・長期予測でよく耳にする“波スペクトル”、“標準偏差”、“レイリー分布”、“長期超過確率”などがすべてイメージできるようになっているだろう。

5.1. 応答関数の真の役割

短期・長期予測の本題に入る前に、その土台となる“線形重ね合わせ”の観点から、応答関数の持つ役割について説明しよう。

前章までで応答関数についての説明をしたが、そもそも、実際の海面は不規則波であって、実在しない規則波中の応答を知って何か良いことがあるのだろうか？と疑問に思ったかもしれない。実は、応答関数は規則波中の応答を知るためのものというよりも、むしろ不規則波中の応答を知るための道具なのである。その性質は、次の**線形重ね合わせの原理**の上に成り立っている：

ポイント#22　波浪と応答の線形重ね合わせ

・不規則波は規則波（成分波）の重ね合わせで表現できる

・不規則波中の応答は、その成分波に対応する規則波中応答の重ね合わせで表現できる

つまり、一度あらゆる規則波中の応答を調べて応答関数を用意しておけば、どのような不規則波でもそれを成分波に分解することで各成分波中の応答を応答関数から計算でき、それを重ね合わせることで不規則波中の応答を容易に求めることができるのである（図 5.1）。つまり、以下が言える。

ポイント#23　応答関数の役割

応答関数とは不規則波の情報（波スペクトル）を不規則波中の応答の情報（応答スペクトル）に変換するような変換装置の役割を果たす

応答関数の略称である RAO（Response Amplitude Operator）の”operator”は”演算子”と訳されるが、これは RAO が波スペクトルから応答スペクトルへの変換演算子であることに由来している。また、同様の意味を持つ別の言葉で“伝達関数（Transfer function）”と呼ばれることもある。以上のことは、5.4 節にてより具体的に説明する。

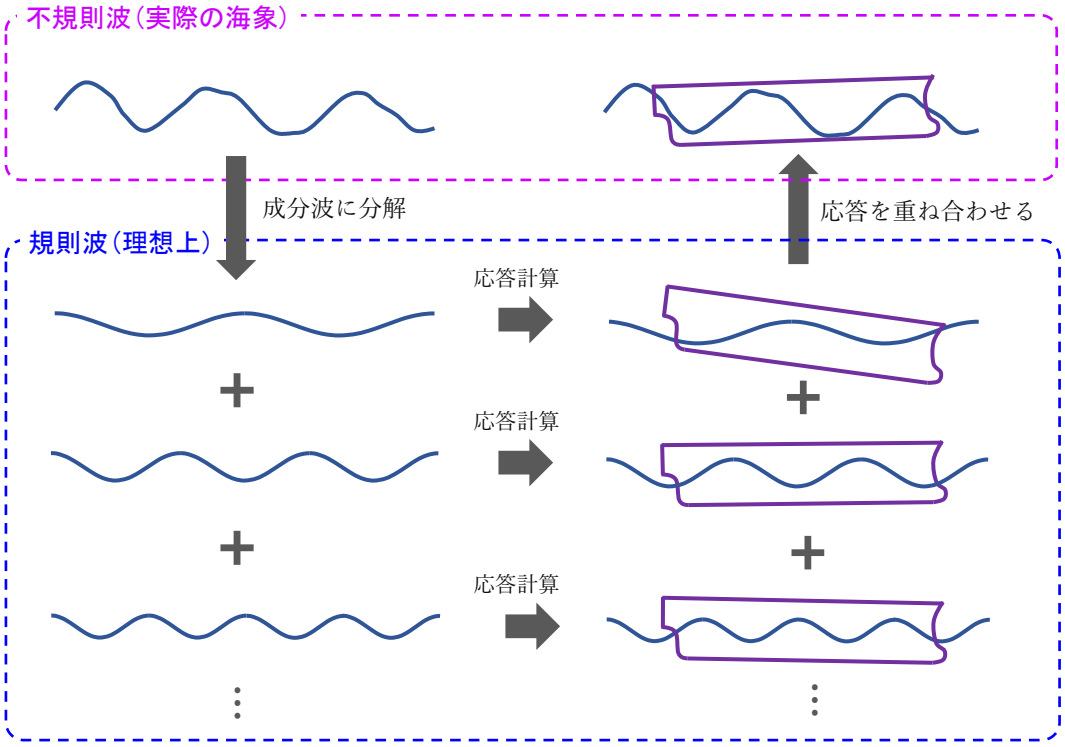


図 5.1　線形重ね合わせの原理に基づく不規則波中船体応答の計算法

5.2. なぜ短期予測と長期予測の２段階に分けるのか

この理由は、短期予測では

> **ポイント#24　短期海象中の応答の特徴**
>
> 短期海象中の応答の極大値の確率分布はレイリー分布で近似できる

という非常に都合のよい統計的性質が成り立つからである。具体的には 5.5 節で後述するが、今は短期海象中の応答が計算上極めて有用な性質を持つということを理解しておけばよい。この性質は、主に３時間程度の短期期間では有義波高、平均波周期等の統計的性質は変化しない（定常）とみなせることに立脚している。よって、長期期間（約 10^8 波）を約 10^5 個の定常とみなせる短期期間（約 1000 波）に分割して、各短期海象での統計値を上記の性質を使って計算したのちに、それを合計して長期の統計値を予測するのである。

5.3. 短期予測①：波スペクトル

すでに用語として何度か登場した“波スペクトル”について具体的に説明しておく。不規則波は成分波に分解できると説明したが、その成分波の情報を集めて不規則波を特徴づけるものが波スペクトルである。

ポイント#25　波スペクトルの意味

波スペクトルは、不規則波を成分波に分解し、その成分波の周波数毎の振幅の大きさ（の二乗）の情報を集約した関数

具体的には、波スペクトルは波周波数ωの関数$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)$で表され、横軸を適当に分割したときの短冊の面積$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega_i)\times\Delta\omega$が、波周波数$\omega_i$の成分波の振幅の二乗を意味する（下図）。また、全面積$\int_0^\infty \Phi_{\zeta\zeta}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$は不規則波変位$\zeta$の**標準偏差**（後述）の二乗に対応する。波スペクトルの記号$\Phi_{\zeta\zeta}$で、Φの下付き文字にζが２つ並んでいるのは“ζの二乗に対応するから”である。

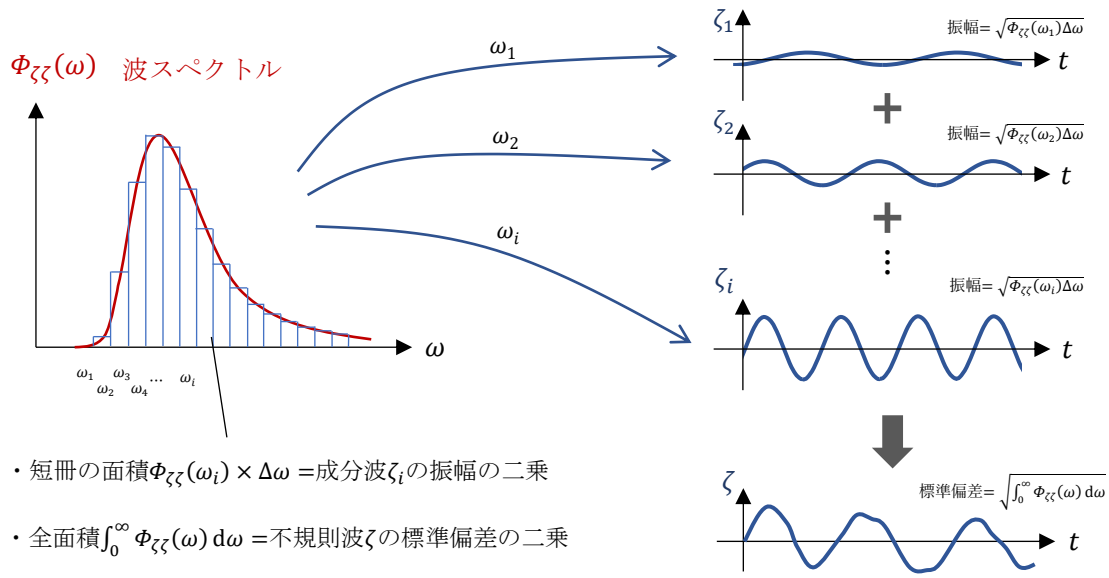


図 5.2　波スペクトルに対応する成分波と不規則波

なお、不規則波をなす成分波が全て一方向から来る場合を**長波頂不規波**(Long-crested wave)とよび、方向的に分散している場合を**短波頂不規則波**(Short-crested wave)とよぶ（図5.3)。実際の海象は当然後者であり、その場合波スペクトルは波周波数に加え波向きβも変数に持つ二変数関数$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega,\beta)$として表される。多くの場合は$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega,\beta)=\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)D(\beta)$のように近似し、波スペクトル$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)$と方向分散の関数$D(\beta)$は別々に考慮される。

波スペクトルは実際の海象の観測データから決められる。種類は様々あるが、よく用いられるのはゼロアップクロス平均波周期T_zと有義波高H_sから定まる ISSC（ピアソン・モスコビッツ型）波スペクトルである。エクセルの[WaveSpctr]シートに、T_zごとの長波頂の ISSC 波スペクトル$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)$が計算されている（方向分散は後で考慮する[14]）。これは有義波高H_s =

[14] 波頂不規則波における計算については、波の方向分散（波スペクトルのβ依存性）は応答の標準偏差の段

1mのときの波スペクトルで、有義波高がαm のときはα^2倍すればよい。

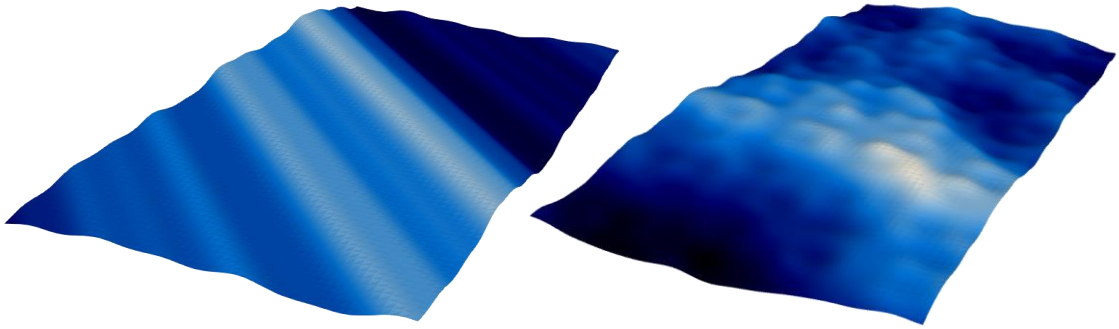


図 5.3　長波頂不規波（左）と短波頂不規則波（右）

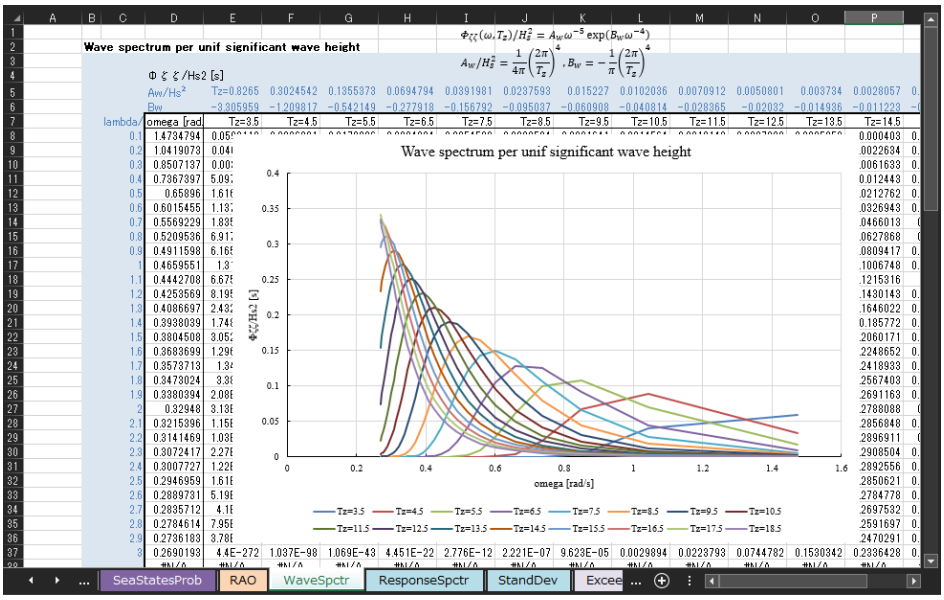


図 5.4　[WaveSpctr]シートの ISSC 波スペクトル

階で考慮される。まず$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega,\beta)=\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)D(\beta)$と近似し、$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)$は ISSC 波スペクトル、方向分散をあらわす関数$D(\beta)$は$\cos^2\beta$分布が通常使われる。この海象下での応答スペクトルは

$$\Phi_{aa}(\omega,\beta)=|A(\omega,\beta)|^2\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)D(\beta)$$

となるので、その標準偏差σ_Sは

$$\sigma_S^2=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\Phi_{aa}(\omega,\beta)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\beta=\int_{-\pi}^{\pi}D(\beta)\int_0^{\infty}|A(\omega,\beta)|^2\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\beta=\int_{-\pi}^{\pi}D(\beta)\sigma_L^2(\beta)\mathrm{d}\beta$$

となる。ここで$\sigma_L^2(\beta)=\int_0^{\infty}|A(\omega,\beta)|^2\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$は、波向き$\beta$から長波頂不規則波が来る場合の応答の標準偏差である。したがって先にすべての波向きβで$\sigma_L(\beta)$を計算しておき、そのあとで$D(\beta)$の重みを付けて足し合わせれば短波頂不規則波中の応答の標準偏差σ_Sが得られる。この計算は[ResponseSpctr]シートで行われている。

5.4. 短期予測②：応答スペクトル

応答スペクトルは、応答を$a(t)$と表す場合、波スペクトルと同様に$\Phi_{aa}(\omega)$のように表される。その意味は波スペクトルと同じで、短冊の面積が成分波中の応答振幅の二乗を意味する（図 5.2 において、$\zeta \to a$と読み替えればよい）。また、全面積$\int_0^\infty \Phi_{aa}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$はやはり不規則波中の応答$a(t)$の標準偏差（後述）の二乗に対応する。不規則波が波向きβから来るときの応答スペクトル$\Phi_{aa}(\omega,\beta)$は、波向きβの応答関数の振幅$A(\omega,\chi)$と波スペクトル$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)$の単純な掛け算

$$\Phi_{aa}(\omega,\beta) = |A(\omega,\beta)|^2 \Phi_{\zeta\zeta}(\omega)$$

で求めることができる[14]。これは、(ω,β)の成分波において

（応答振幅）＝（波振幅 1m のときの応答振幅）×（入射波の波振幅）

の両辺を二乗した式であって、応答が線形倍されていることを示す単純明快な式である。そしてこの式こそ、5.1 節で述べた応答関数が不規則波の情報を不規則波中応答の情報に変換する演算子としてふるまうことを表す式である。

さらに、上の式から、短期海象中の応答に関する次の重要な性質が理解できよう。

> **ポイント#26　短期海象中での応答の特長**
>
> 応答関数がピークをとる波周波数と、波スペクトルのピーク周波数とが一致するような海象条件で、応答スペクトルが大きくなる。これを**広義の同調**とよぶ。

この性質から、応答が過大になる短期海象の条件は、短期予測計算をしなくともおおまかに予測することができる。

波周期T_zの短期海象における応答スペクトル$\Phi_{aa}(\omega,\beta)$は、エクセルの[ResponseSpctr]シートで計算されている。同シートで表示する応答は、[CalcSet]シートの I8 セルで変更できる。

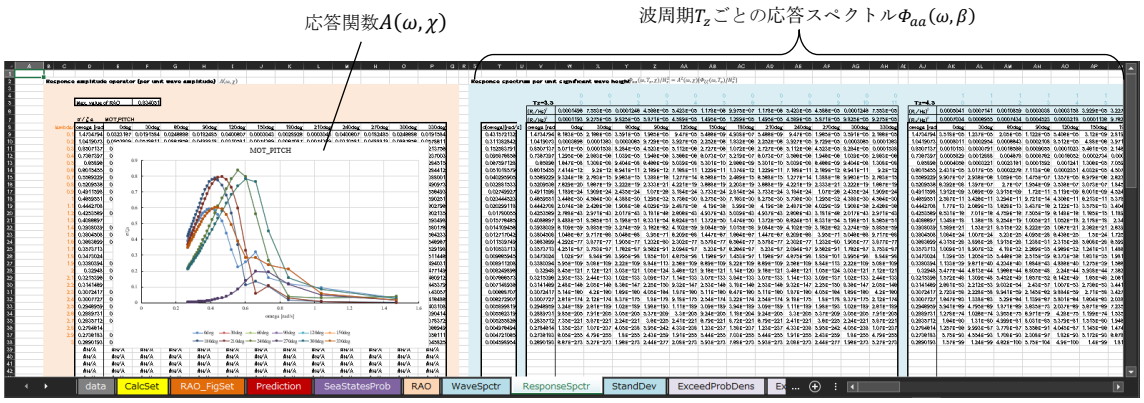


図 5.5　[ResponseSpctr]シートの応答関数、応答スペクトル

5.5. 短期予測③：標準偏差、レイリー分布、1/n 最大期待値

短期予測で重要な“標準偏差”の概念について説明しておく。標準偏差とは一般に“確率変数のばらつき”を意味するが、ここでは“短期海象中の（波変位や応答の）不規則変動量の代表値“という認識で相違ない。なぜ不規則変動量の代表値を標準偏差と呼ぶのだろうか？その理由は、以下の図を見ると理解できる。

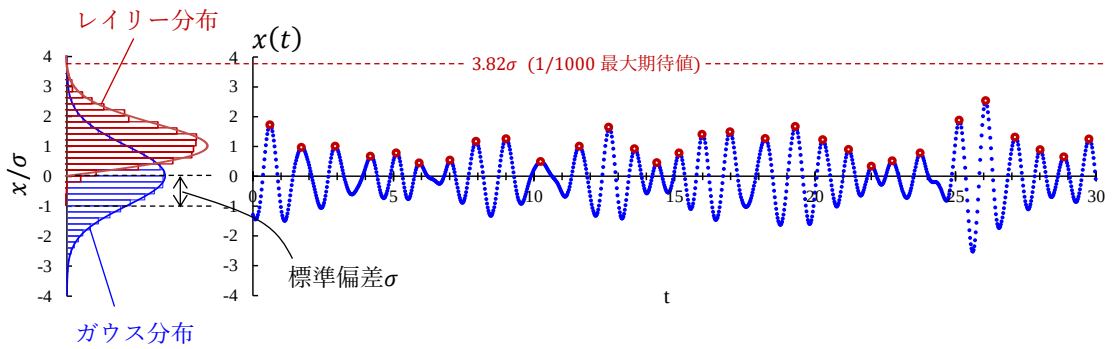


図 5.6　ある不規則変動量$x(t)$の時系列（右）とその瞬時値のヒストグラム（左、ガウス分布）と極大値のヒストグラム（左、レイリー分布）

図 5.6 について解説する。まず、不規則変動する量$x(t)$を、一定時間刻みの点としてプロットする（青点）。その点の集合に対してヒストグラムを作成すると、$x(t)$がどのような量（波変位、運動、VBM…）であれ、その分布は必ずガウス分布になることが知られている[15]。このガウス分布の標準偏差σこそが、ここでいう標準偏差なのであって、それが$x(t)$の変動量の代表値を表すことは明白であろう。

次に、変動する$x(t)$に対して、極大値を一つ一つ拾ってプロットする（赤点）。その点の集合に対して先ほどと同じようにヒストグラムを作成すると、$x(t)$がどのような量であれ、その分布はレイリー分布で近似できることが知られている[16]。そしてこのレイリー分布はガウス分布の標準偏差σによって完全に規定され、極大値がxがx_1を超える確率は

$$P[x > x_1] = \exp(-x_1^2/2\sigma^2)$$

と表される。これより、短期海象中で 1/n の確率で発生する最大値である“**1/n 最大期待値**”

---

[15] これは“独立な確率変数を無数に足し合わせた確率変数はガウス分布に従う”という**中心極限定理**からいえることである。不規則波の場合、成分波ζ_iがそれぞれ独立の確率変数であり、その合計である不規則波ζは必ずガウス分布に従う。ただし、線形重ね合わせが成り立つ場合を前提としている。

[16] これはスペクトルが**狭帯域**である（スペクトルの山が鋭い）ことが前提となっている。波スペクトルが狭帯域なので、その応答スペクトルも基本的には狭帯域と考えてよい。ちなみにスペクトルΦ_{xx}が狭帯域の場合の変数xは、スペクトルのピーク周波数で振動していて、その包絡線がなだらかに変化するような時系列に従う。

という統計量が定まる。それは単純に$P[x > x_1] = 1/n$としたときの閾値x_1なので

$$1/n = \exp(-x_1^2/2\sigma^2) \leftrightarrow x_1 = \sigma\sqrt{2\ln n}$$

と表される[17]。短期海象は約 1000 波であるため、最も重要な統計量は 1/1000 最大期待値であり、それは3.72σとなる。

かくして以下が言え、これが短期予測で行っている全てである。

ポイント#27　短期予測の内容

不規則変動量$x(t)$のスペクトル$\Phi_{xx}(\omega)$を積分して標準偏差σを求めれば、極大値分布であるレイリー分布が定まるので、$x(t)$の 1/n 最大期待値$\sigma\sqrt{2\ln n}$が直ちに求まる

エクセルの[StandDev]シートには、すべての短期海象中（平均波向きχ、平均波周期T_z別）の標準偏差$\sigma(\chi, T_z)$がまとめられている。横軸を波周期、縦軸を標準偏差にとった図は“短期応答関数”などと呼び、どういった短期海象で応答が大きくなるのかがわかる。なお、これは有義波高が 1m のときの標準偏差であり、有義波高がαm のときの標準偏差はやはりα倍すればよい。

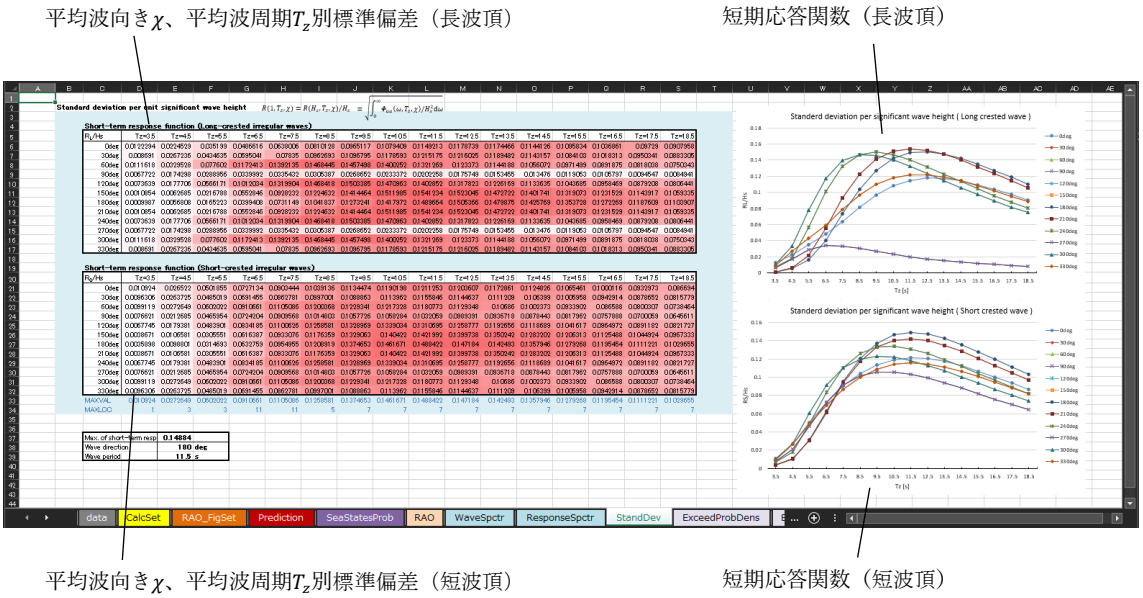


図 5.7　[StandDev]シートの標準偏差と短期応答関数

---

[17] 正確には$\sigma\sqrt{2\ln n}$は 1/n 最大期待値の式ではない。一般に 1/n 最大期待値とは無限回の試行結果のうち”上位 1/n をとったものの平均値”を指すもので、式は

$$x_{1/n} = \sqrt{2}\sigma\left[\sqrt{\ln n} + n\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{erf}(\sqrt{2\ln n})\right)\right]$$

となる。これに対して$\sigma\sqrt{2\ln n}$は“ちょうど上位 1/n に位置する閾値”であり、$x_{1/n}$より若干だが小さい。しかし、短期・長期予測で古くから用いられる式は$\sigma\sqrt{2\ln n}$の方で、こちらを 1/n 最大期待値と呼ぶのが慣例である。これは、上の$x_{1/n}$の式だと複雑すぎてnについて解くことができないためと思われる。

＜ハンズオン演習＞

ピークを持つ適当な応答関数（roll 運動や VBM）について、**広義の同調（ポイント#26）**が起こることを確認してみよう。まず[CalcSet] シートの I8 セルで応答を 1 つ選択し、[ResponseSpctr]シートから応答ピーク周波数と波向きを確認する。その後、[WaveSpctr]シートから、応答のピーク周波数でピークをとる波スペクトルの波周期T_zを確認する。最後に、[StandDev]シートで標準偏差（長波頂と短波頂）がピークをとる波周期T_zと波向きについて確認しよう。

5.6. 長期予測①：波浪発現頻度表

波浪発現頻度表とは、長期期間（約 25 年）で発現するであろう短期海象の回数が、波周期T_z、有義波高H_sごとに記された表である。長期期間（10^8 波）を短期期間（10^3 波）に分割しているので、表の中の数値は合計すると 10^5 になるようになっている。頻度表は、海域に着目して”発生する海象”として作成される場合と、船舶に着目して”遭遇する海象”として作成される場合がある。船舶の設計では、安全側の設計として海象の荒い北大西洋の波浪発現頻度表が用いられることが多い。

エクセルの[SeaStatesProb]に波浪発現頻度表が記載されている。下の表は慣例どおり合計が 10^5 になっており、上の表では確率分布として扱うために合計で 1 になるよう正規化されている。

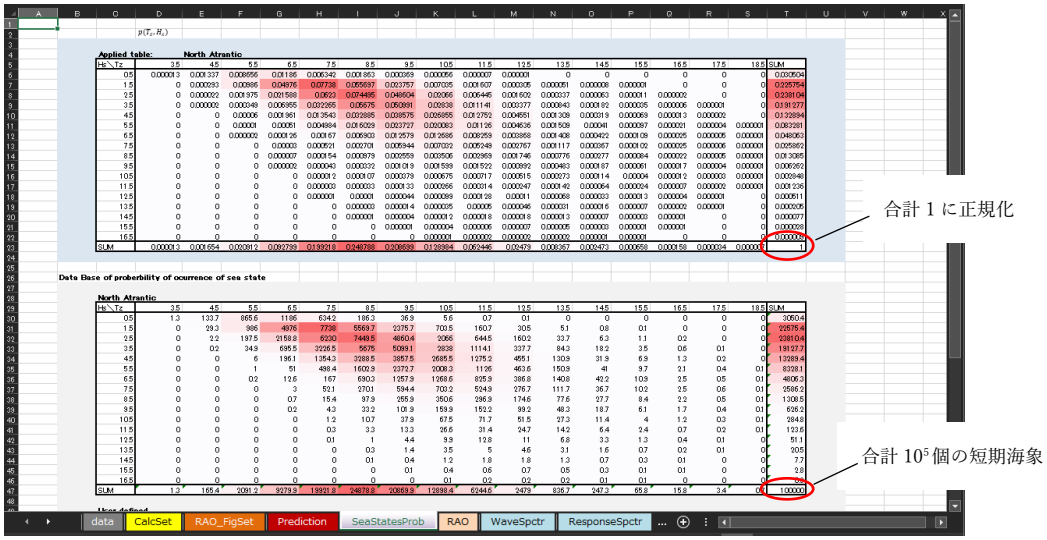


図 5.8　[SeaStatesProb]シートの波浪発現頻度表

5.7. 長期予測②：長期予測値、最悪短期海象

短期予測によって、各短期海象での応答の標準偏差が求まり、さらに波浪発現頻度表によ

って船が実際に遭遇するだろう短期海象の頻度がわかっていれば、長期期間の統計値を知ることができる。

長期予測のゴールは、長期期間中で 1/n 最大期待値を求めることである。ここでの n とは、受ける波の数だと考えて差し支えない。”**$1/10^8$ 最大期待値**”は 10^8 回波を受ける中での応答の最大値であり、**長期予測値**ともよばれる。

長期の 1/n 最大期待値を求めるためには、まず”ある短期海象で応答$a(t)$がある値a_1を超過する確率q_{a_1}”を求める必要がある。それは次の式で計算される。

$$q_{a_1} = \left(\text{短期海象 1000 波中で}a(t)\text{が}a_1\text{に達する確率}\right) \times (\text{その短期海象自体に遭遇する確率})$$

右辺の 1 つめの確率は短期予測で求められるレイリー分布の式そのまま（$P[a > a_1] = \exp(-a_1^2/2H_s^2\sigma^2)$：標準偏差が有義波高倍される）であり、2 つめの確率は波浪発現頻度表より簡単に定義できる。そしてこれをあらゆる短期海象（有義波高H_s,波周期T_z,平均波向きχの組み合わせ）で計算して$q_{a_1}(T_z, H_s, \chi)$を用意しておく。これは超過確率密度関数と呼ばれ、エクセルシートの[ExceedProbDens]では閾値a_1を変えつつ$q_{a_1}(T_z, H_s, \chi)$が計算されている。

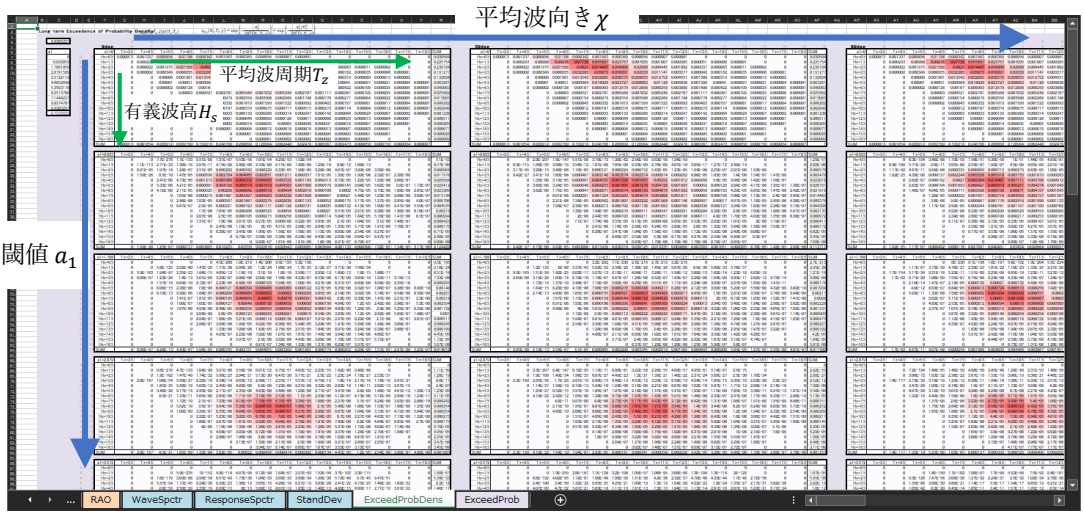


図 5.9　[ExceedProbDens]シートの超過確率密度関数

ここまで計算しておけば、“長期期間で応答$a(t)$がある値a_1を超過する確率Q_{a_1}”はすべての短期海象での超過確率の和

$$Q_{a_1} = \sum_{T_z}\sum_{H_s}\sum_{\chi} q_{a_1}(T_z, H_s, \chi)$$

として求めることができる。Q_{a_1}は**長期超過確率**と呼ばれるものである。

以上をあらゆる閾値a_1に対して計算して$Q(a_1)$の曲線を引けば、$Q(a_1) = 10^{-8}$を満たすような閾値a_1を求めることができ、これこそが求めたかった長期予測値$a_{Q=10^{-8}}$である。エク

セルの[EceedProb]シートには、長期超過確率分布$Q(a_1)$を横軸を$-\mathrm{Log}(Q)$、縦軸をa_1で示したグラフがある。$-\mathrm{Log}(Q)=8$におけるa_1が長期予測値である。

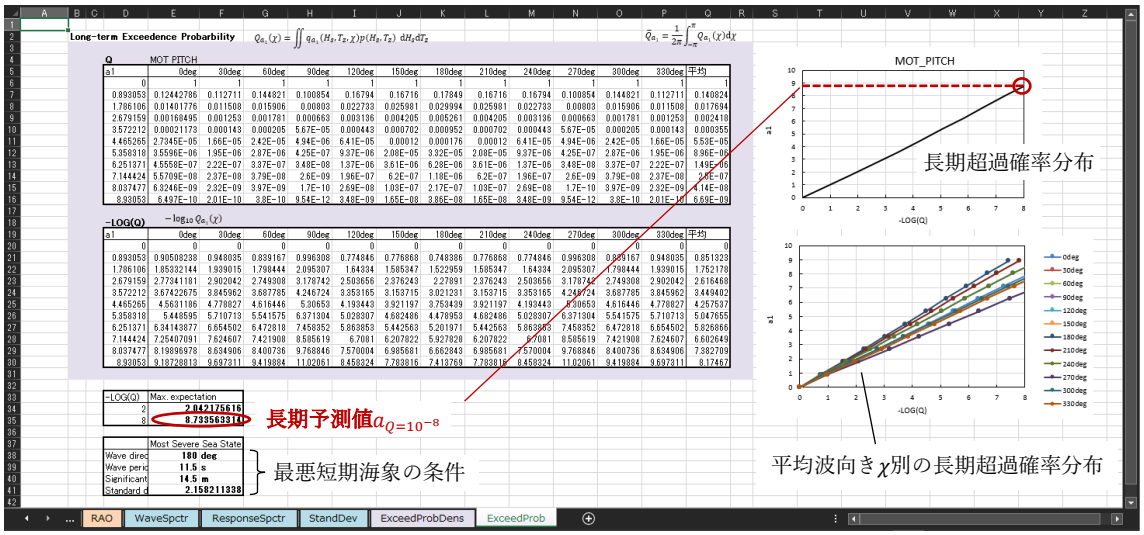


図 5.10　[ExceedProb]シートの長期超過確率、長期予測値、最悪短期海象の条件

同シートには、**最悪短期海象**(the most severe short-term sea states)の波条件（T_z, H_s, χの組み合わせ）も示されている。最悪短期海象とは、短期海象において長期予測値を超過する確率$q_{a_{Q=10^{-8}}}(T_z, H_s, \chi)$が最大となるような短期海象、すなわち応答$a(t)$が長期予測値$a_{Q=10^{-8}}$に達する確率（遭遇する確率込み）の最も高い短期海象を意味する。

長期予測の要点を以下に簡潔にまとめておく。

ポイント#28　長期予測の内容

・短期海象ごとに閾値a_1を超える確率q_{a_1}を計算（レイリー分布$\exp(-a_1^2/2H_s^2\sigma^2)$）し、それらを波浪発現頻度で重みづけして合計したものが長期超過確率Q_{a_1}である

・長期超過確率が$Q_{a_1}=10^{-8}$になる閾値a_1を長期予測値と呼ぶ

＜ハンズオン演習＞

・[ExceedProbDens]シートから、閾値a_1が高くなるほど、超過確率密度$q_{a_1}(T_z, H_s, \chi)$の大きくなる有義波高が高くなることが分かるだろう。なぜそのような傾向を示すか、考えてみよう。

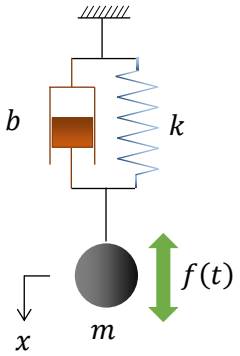
・[Prediction]シートのマクロを実行して各横断面における VBM, VSF の長期予測値を計算し、横軸を section、縦軸を長期予測値にとってグラフをプロットしてみよう。VBM, VSF の応答関数（振幅）の船長方向分布とどの程度相関があるかについて、調べてみよう。

6. 付録

6.1. 振動論の基礎

本文を通じて、波浪中応答計算とは規則波中の応答を知ることが本質的に重要であることが理解できたことと思う。そして、規則波中の応答を扱うことは、単振動する物体を対象とする物理を扱うことにほかならず、工学の基本分野の一つである振動論がその土台となる。そこで、振動論の一般的な話を、数式を最小限にとどめごく簡単に解説する。

最も基本的な 1 自由度のバネ・ダンパ・マス系について考える。質量mの質点が、ばね係数kのばね、減衰力係数cのダンパー（摩擦力と解釈してもよい）に並列につながれており、これが外力$f(t)$を受けるとき、この運動方程式は



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

と書かれる。ここで、外力が周波数ωの周期的外力$f(t) = F\cos\omega t$だったとすると、$x(t)$も周波数ωで振動するだろう[18]。この場合$x(t) = X\cos(\omega t + \varepsilon)$として代入し、sin, cos の係数について比較すれば、この系の応答関数、すなわち振幅Xと位相εが

$$X = \frac{F}{k\sqrt{\{1-(\omega/\omega_0)^2\}^2 + (2h\omega/\omega_0)^2}},\quad \varepsilon = \tan^{-1}\frac{2h(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}$$

と求まる。ただし$\omega_0 = \sqrt{k/m}$（固有周波数），$h = c/2\sqrt{mk}$（減衰係数比）と置いた。

さて、この振幅XをF/k（定常力Fを作用させたときの変位）で割った値および位相εを、横軸をω/ω_0にとって、減衰係数hを変えつつ表示してみる：

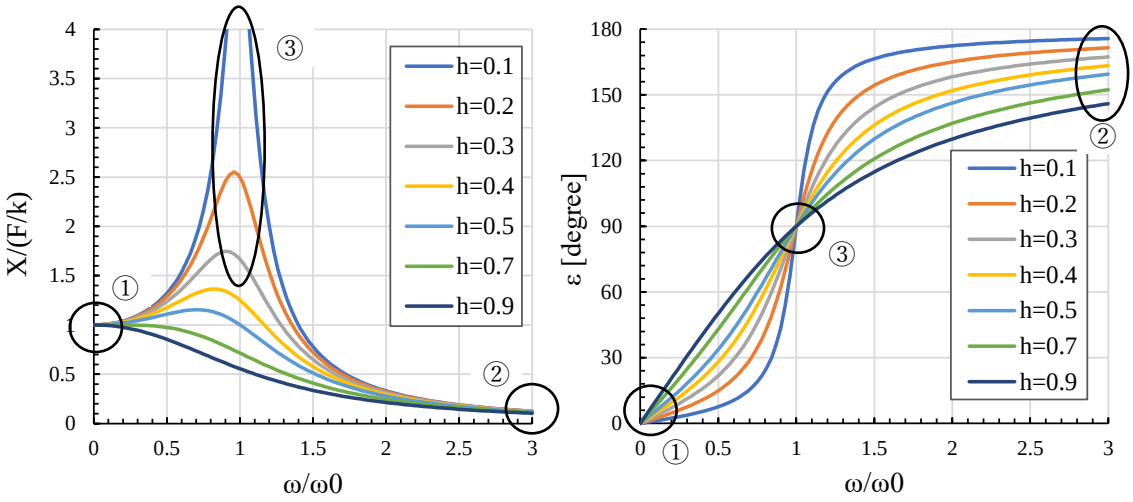


図 6.1 バネ・ダンパ・マス系の応答関数（左：振幅、右：位相）

[18] 本来は斉次解＋特解であるが、ここでは定常振動する特解のみを考える。斉次解は引っ張って手を離したときの応答で、減衰して次第に消える。ここでは∞時間前から振動を与えている定常状態を考えるので、斉次解は無視してよい。

この図で着目すべき点を列挙する。

① $\omega/\omega_0 \to 0$の低周波数の極限で、$X \to F/k$になり、かつ$\varepsilon \to 0$つまり外力と同じ位相になる。これは、極めてゆっくりバネを押し引きする状態（ほぼ定常力）となることを考えるとわかりやすい。この周波数では、運動方程式の左辺はバネ力項$(-kx)$が主要になる。

② $\omega/\omega_0 \to \infty$の高周波数の極限で、$X \to 0$になり、かつ$\varepsilon \to 0$つまり外力と逆位相になる。この極限では、非常に早く振動する力を与えてもマスがついてこられなくなるため振幅は小さくなり、かつ力はマスが変位した方向と常に逆方向に働く（このことは手元にあるモノを素早く振動させてみると理解できる）。この周波数では、運動方程式の左辺は慣性力項$(m\ddot{x})$が主要になる。

③ $\omega/\omega_0 = 1$の**同調周波数**で、減衰係数比hが小さい場合はXは鋭いピークをとり、位相はhによらず90°（1/4 周期遅れ）となる。これは、バネを引っ張り手を離した時に自然に振動する周波数（固有周波数）と同じ周波数で外力を与えている状況で、このときに振幅が大きくなることは理解できよう。位相が90°となることについては、マスが元の位置を速度最大で通過する瞬間に最大の力を与えている状況を意味しており、マスの運動が大きくなるようアシストされているイメージを持っておけばよい。この周波数では、運動方程式の左辺は慣性力項とバネ力項が打ち消しあって、減衰力項$(c\dot{x})$のみが残る。

④ 減衰係数比hが小さい場合、同調周波数付近で振幅Xが急激に変化することは勿論、位相εが急激に変化することにも注意が必要である。すなわち、同調周波数付近では、物体の位置や姿勢と荷重状態の関係が少しの周波数で大きく変わってしまう。一方減衰係数比が大きい場合はXは明確なピークを持たず、位相の変化も緩やかになる。ただし、船体運動では基本的にピークを持つ（pitch が$h = 0.4$程度、heave が 0.3 程度、roll が 0.1~0.2 程度）と考えてよい。

船体運動のうち、復原力のある運動モード heave, pitch, roll（上下移動の伴う運動で、静水圧の変化によって復原力が働く）については以上のバネ・ダンパ・マス系の挙動が基礎になり、その応答関数も図 6.1 と似たような形になる。そして図 6.1 と大きく異なる点は、図 6.1 の応答関数は波浪による外力の振幅Fが一定の場合の図であるが、船体運動は外力の振幅F自体も周波数で変化するということである。つまり、

ポイント#29　バネ・ダンパ・マス系から見る船体運動の応答関数

船体運動（heave, pitch, roll）の応答関数の振幅$A(\omega)$は、図 6.1 左の振幅関数$X(\omega)$と波浪による外力振幅$F(\omega)$との掛け算になる（$A(\omega) = X(\omega)F(\omega)$）

一方で、位相はおおむね図 6.1 右と変わらないと思っておいてよい。なお、復原力の無いモード surge, sway, yaw については復原力項kxを無くしたダンパ・マス系の運動方程式になるが、それらについては重要度も低いため割愛する。

6.2. 流体力係数と波浪強制力

ここでは、船体運動がどのようにバネ・ダンパ・マス系に置き換えられるかについて説明する。Heave, pitch, roll 運動の（1自由度の）運動方程式は次のように書かれる。

$$(m+a)\ddot{x}+b\dot{x}+cx=f(t)\ (=F\cos(\omega t+\varepsilon))$$

ここで、mは船の質量である。a,b,cはすべて流体力に起因するもので、まとめて**流体力係数**と呼ばれる。$f(t)$は**波浪強制力**とよばれ、やはり流体力の1種である。これらを順にみていこう。

I） a: 付加質量

海に浮かぶ船体が運動すると、船体に追随して周囲の流体も移動し、その流体質量の分だけ船は見かけ上重くなる。その増加分の質量aを**付加質量**と呼ぶ。例えば heave 運動の付加質量は、おおよそ船幅Bの船底の下にある半円の流体質量で近似できる（$a\cong\pi\rho B^2/8$）。

II） c: 復原力係数

船が下方向に変位すれば、静水圧およびその積分である浮力は比例的に増加し、結果的に船を押し戻そうとする**復原力**として働く。Heave は勿論のこと、pitch, roll も姿勢変化による静水圧の変化から**復原モーメント**を受ける。そのバネ係数に対応する係数は復原力係数cと呼ばれ、復原力係数は船体の水線面形状と重心位置のみによって定まる。Roll の復原力係数は、船の質量と横メタセンタ高さの積（$m\times\overline{GM}$）である。

III）b: 造波減衰力係数

船体運動における減衰力（ダンパ）は、付加質量、復原力係数に比べてややわかりづらいかもしれないが、“系のエネルギーの消耗度合い”としてイメージしておくとよいだろう。これは、マスを引っ張って手を離した後の挙動は、ダンパが強いほどエネルギーが消耗され、運動が急速に小さくなることから分かる。では、船体運動のエネルギーの消耗度合いは何で測れるだろうか？それは、運動によって造られる波の大きさによって測られる。船体が運動することで周囲に波が造られるわけだが、これは船の運動エネルギーが造波のエネルギーに変換されるためである。したがって、船体運動に関わる減衰力係数は**造波減衰力係数**と呼ばれる。造波の大きさは船の運動によって異なり、減衰係数比は pitch が最も大きく、heave がその次、そして roll は最も小さくなる。そのため、roll 運動に対しては造波減衰力以外のビルジキールによる粘性減衰力や造渦減衰力が主要になる。Roll 以外の運動モードに対しては、造波減衰力が減衰力の殆どを占める。

IV）$f(t)$: 波浪強制力

以上の3つの流体力は、方程式で$\ddot{x},\dot{x},x$がかかっていることから分かるように船が運動するときにのみ発生する流体力である。一方、船を無理やり固定して運動させていなくとも、

波が入射して当たっているのだから、当然それによる 6 自由度方向の力が作用する。その力を**波浪強制力**と呼ぶ。波浪強制力は、船が無く、波が散乱しない（乱されない）ときの圧力場から計算される“**Froude-Krylov 力**”と、散乱波の圧力場から計算される力“scattering 流体力”に分けられるが、基本的には Froude-Krylov 力の方が主要でしかもイメージしやすいので、scattering 流体力については忘れてしまってよい。

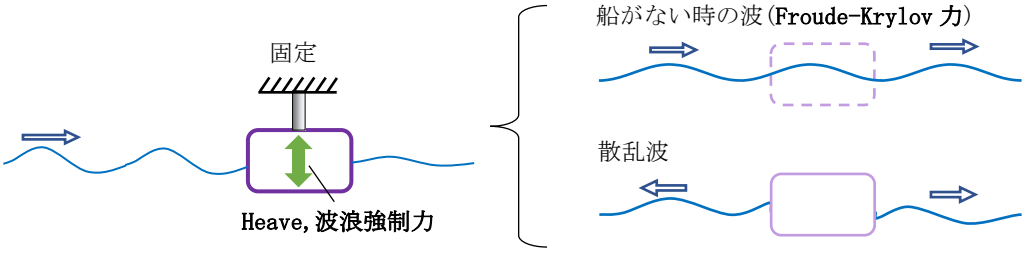


図 6.2 船体を固定したときにかかる波浪強制力とその分解

以上のように、流体力を 4 種類に分けて説明した。このように成分分解することで、船体運動が見通し良く＆計算しやすくなる（この成分分解も、線形重ね合わせの考えに基づく）。

本節で説明したうち、特に重要なポイントは以下の通り。

ポイント#30　流体力と船体運動

・規則波中の船体運動(heave, pitch, roll)は外部の流体がバネ、ダンパ、マスの 3 つの役割を担うため、バネ・ダンパ・マス系で表現可能

・ダンパの強さである減衰力係数は運動によって造られる波の大きさで決まり、pitch, heave 運動は波が大きく減衰力係数も大きい

・バネ・ダンパ・マス系の外力である波浪強制力は、船がない時の規則波の圧力場から計算される Froude-Krylov 力が主要

6.3. 運動モード間の連成

ここまでは運動をそれぞれ 1 自由度（独立）で扱ってきたが、本来は運動モード間で互いに影響を与え合う。これを**連成**と呼ぶ。

6 自由度の船体運動はよく縦運動（surge, heave, pitch）と横運動（sway, roll, yaw）という括りで分けられることがあるが、それは

ポイント#31　縦運動と横運動の分離

線形解析かつ左右対称船では、縦運動と横運動は独立（相互に影響を与えない）

という性質があるためである。逆をいうと、縦運動同士、横運動同士では連成が生じる。

船体運動の連成の中で特に重要なのは、heave と pitch 間の連成, roll と sway 間の連成で

ある。連成というと抽象的だが、具体的には以下のとおりである。

ポイント#32　船体運動の連成
Heave と pitch の連成
…重心位置に上下力を与えた場合でも回転（pitch）運動する
…重心まわりに pitch モーメントを与えた場合でも回転中心が重心にならない
Sway と roll の連成
…重心位置に左右力を与えた場合でも回転（roll）運動する
…重心まわりに roll モーメントを与えた場合でも回転中心が重心にならない

これらの連成現象は船が動く時に生じる流体力の作用中心が重心以外の位置にあることが原因である。

いずれにせよ、pitch(roll)が大きくなる波条件では heave(sway)も幾分大きくなり、その逆も成り立つといった相互影響があることを覚えておけばよい。

6.4. 線形とは何か

本資料は、線形の波浪中応答解析 web アプリをベースに説明した。それゆえ本文ではところどころで“線形性”、“線形重ね合わせ”という単語が現れているものの、それらの説明は曖昧にしていた。ここでは、線形性についての一般的な議論から、線形の物理モデルの具体例、波浪中船体応答を線形とみなすことが何を意味するか、どういった非線形の種類があるのかについて一通り説明する。

6.4.1. 線形性

一般に、線形とは

$$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$$

が成り立つような”変換操作$f(*)$の性質”を指す。この$f(*)$は関数でなくとも、なんらかの入力xを応答$f(x)$に変換するもの（物理モデル）であればなんでもよい。上の式が意味するところは

ポイント#33　線形モデルの特長
・入力を係数倍すれば（ax）、応答も係数倍される($af(x)$)
・入力を複数の要素の足し算に分解できる($x_1 + x_2$)なら、各要素を単独で入力したときの応答（$f(x_1), f(x_2)$）を調べておけば、あらゆる入力（$ax_1 + bx_2$）における応答（$f(ax_1 + bx_2)$）はそれらを係数倍して足し合わせるだけで得られる

ということである。特に後者の性質のメリットが顕著であり、応答を足し合わせることを**線形重ね合わせ**と呼ぶ。逆に、非線形モデルは応答の足し合わせができないため、あらゆる入力に対する応答はその都度計算する必要がある。

以上は抽象的な説明で、対象も非常に幅広く柔軟な概念だが、物理で”線形”という言葉を見た/聞いたときには、変換前の入力x、変換後の応答$f(x)$が具体的に何を指すのかを常に意識しておく必要がある。ここを曖昧にしておくと、非常にフワフワしたイメージで終わってしまう。少し具体的な例として、材料力学、流体力学、船体運動の場合で説明する。

I)　材料力学の場合

片持ち梁を想定してみよう。入力xは梁にかかる外力、応答$f(*)$はたわみ関数だとしよう。x_1は点 1 における単位外力、x_2は点 2 における単位外力とすると、$f(x_1)$はx_1をうけるときの片持ち梁のたわみ分布、$f(x_2)$はx_2をうけるときのたわみ分布である。そして$f(ax_1+bx_2)$は、“点 1 にaの強さの外力かつ点 2 にbの強さの外力をうけるときのたわみ分布”であって、それは$af(x_1)+bf(x_2)$すなわち点 1、点 2 にそれぞれ単位外力をうけるときのたわみ分布をそれぞれa,b倍して足し合わせたもので表せるということを意味する。

より一般化して考えると、FEM のように構造物を離散化しておき、全ての節点かつ全ての方向に単位外力x_iを与えたときの構造応答を全て調べて$f(x_i)$の情報を有しておけば、あらゆる荷重状態の構造応答$f(\sum_i a_i x_i)$をその線形重ね合わせで表現できるということである。構造応答といっても、例えば応力の二乗、平方根などの“非線形演算”で表される Mises 応力などの量は、線形ではなくなる。

II)　流体力学の場合

入力は、流体の湧き出る点（湧き出し点）とし、出力はそれによる流速分布としよう。x_1は点 1 における単位強さの湧き出し、x_2は点 2 における単位強さの湧き出しとする（強さが負の場合、吸い込みとなる）と、$f(x_1), f(x_2)$はそれぞれ点 1，2 の湧きだしによる流速分布である。そして$f(ax_1+bx_2)$は、“点 1 にaの強さの湧きだしかつ点 2 にbの強さの湧きだしがあるときの流速分布”であって、それは$af(x_1)+bf(x_2)$すなわち点 1、点 2 にそれぞれ単位湧き出しがあるときの流速分布をそれぞれa,b倍して足し合わせたもので表せるということを意味する。

この湧き出し（&吸い込み）をうまく線状に並べることで、流体中にある物体が移動・動揺するときの流速分布を表現することができることが知られている。つまり、1 つの単位湧き出しによる流速分布$f(x)$を知っておけば（それが場所に依存しなければ）、その線形重ね合わせによって任意の物体があるときの流速分布を知ることができる。そのような基本となる流速分布$f(x)$は、ランキンソース（水面のある場合は自由表面 Green 関数）と呼ばれるものである。

III）船体運動の場合

船体運動については、図 5.1 で説明したとおりである。つまり、入力xは入射波（規則波でなくともよい）で、応答$f(x)$はそのときの船体運動である。そしてこの場合の$f(ax_1+$

$bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$が何を意味するか、どのような便利なことがあるか、5.1 節で説明したことから明らかであろう。

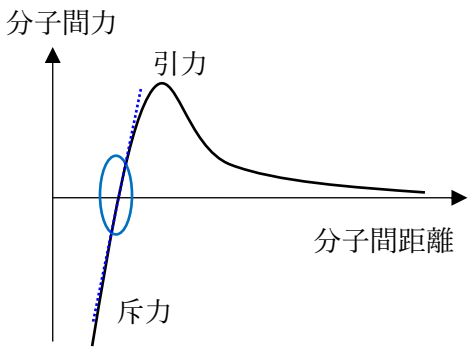
6.4.2. 物理モデルの線形化

線形重ね合わせのメリットがある程度イメージできただろうが、なぜ物理モデルが線形性を持つのか、どういったときに線形性を持つのかを知っておきたい。

まず、基本的に全ての物理現象は非線形である。そして線形性は、現象の一部だけを着目したときに現れる、近似の結果に過ぎない。つまり

> **ポイント#34　物理現象と線形性**
> 殆どの物理現象は、入力と応答の変動が十分に小さい範囲では、線形性が表れる

のである。これは「どんなに曲がった関数でも（連続関数であれば）その一部を拡大すれば直線に見える」というテイラー展開の 1 次近似の考えから理解できよう。例えばフックの法則$F = kx$は、物体を引っ張る力Fと移動量xが比例するという経験則である。物体の変形と力の関係は元をたどれば分子間距離と分子間力の関係であり、それは右図のように、距離が近づきすぎると斥力がはたらき、遠ざかると引力が働くといった関数になっている。そしてフックの法則は、引力も斥力も働かない距離付近（青丸部）の関数が直線で近似できる部分を見ているにすぎない。フックの法則は、このような一次近似が実用的な範囲内でよく成り立つから、法則として成立しているのである。逆に、以下のことが言えよう。



> **ポイント#35　物理現象の線形化**
> 物理現象は一次近似することで線形化することができるが、それがどの程度現実をよく表すモデルになっているかは、それぞれの現象による

構造力学では、材料特性の他、変形が大きくなると幾何学的な非線形影響が表れるが、船体の構造解析では鋼が非常に硬いため変形が微小であり、線形化したモデルが良く成立する。

他方、船体運動では、次節に示す様々な要因から非線形性が表れるが、比較的低波高であれば線形化したモデルが適用できる。ただし roll の減衰力に関しては、粘性による乱流、造渦といった現象が比較的小さな動揺振幅でも線形挙動から大きく逸脱してしまうため、低波高でも非線形モデル化が必須となる。

6.4.3. 波浪中船体応答に現れる非線形影響と線形近似

波浪中船体応答における非線形影響の要因は多岐にわたるが、おおまかに以下のように分類できる。

① 流体の非線形性

非粘性の理想流体では線形性が成り立つが、実際の流体は粘性を持ち、それによる非線形影響が表れる。これはすでに述べた通り、roll の減衰力に対して顕著に表れるもので、その他の運動に対しては、実際の船舶のスケールでは無視してよい。

② 波浪（自由表面形状）の非線形性

波高が大きくなると規則波の波形は sin カーブからずれ、山がとがり、谷は平たくなる。波高をさらに大きくすると、最終的には砕波が起こる。この影響は波岨度（波高H_w/波長λ）が 1/30 以下だと十分無視できる。なお砕波は、波岨度が 1/7 程度で生じると言われる。

③ 船体にかかる波面形状の変化

波浪中にある船は、時々刻々と波から出たり入ったりし、船体表面にかかる波形は変化する。したがって船にかかる流体力は、本来は時々刻々の波面より下部での圧力積分により求めなければならない。この“圧力の積分領域の変化”こそが非線形性を生む要因になる[19]。このことからわかるように、喫水線近傍で上下方向の船体形状変化が強い船ほど本非線形影響が大きくなる。この成分は船体応答に対する非線形現象の中では特に重要で、**形状非線形**と呼ばれる。

線形解析では圧力の積分領域を船体の喫水線より下で固定する[20]ことで、本非線形影響を線形化している（図 2.7）。そのため、線形解析で計算される圧力分布はそのままだと非常に非現実的で、出力するときに 2.3 節-d)で説明したような圧力修正を施して現実的な圧力分布に修正するのである。この線形化は非常に大胆な近似で、すぐに成り立たなくなりそうに思えるかもしれないが、無視した圧力部分の寄与は（図 2.7 の丸で囲った三角形の面積なので）波高に対する二乗の成分であり、微小波高では無視することができる。線形近似の成り立つ目安についてはおおむね$H_w/\lambda < 1/30$と考えてよいが、船体形状（の上下方向の変

---

[19] 圧力の積分領域の変化が非線形性を生む理由について考えてみよう。線形の規則波を考え、その中の水圧は全て調和振動している状況を考える。船にかかる流体力はその積分（足し算）であるため、単純化して、２つの調和振動する力の和を考えてみると、三角関数の合成により

$$A_1\cos(\omega t+\varepsilon_1)+A_2\cos(\omega t+\varepsilon_2)=\bar{A}\cos(\omega t+\bar{\varepsilon})$$

と表せ、２つの和の合計もやはり調和振動になる。しかし、積分領域が時間変化するということは、ある時刻では左辺第１項, 第 2 項のみを考慮、あるいはどちらも考慮しない、といった操作をすることを意味する。このような演算は“非線形演算”であり、この場合右辺は当然 cos では表せず、これが船体応答の非線形性を生むのである。

[20] 線形解析では、流場解析自体、静水面より下でしか計算していない。

化の強さ）に依存するため一概に言えない。

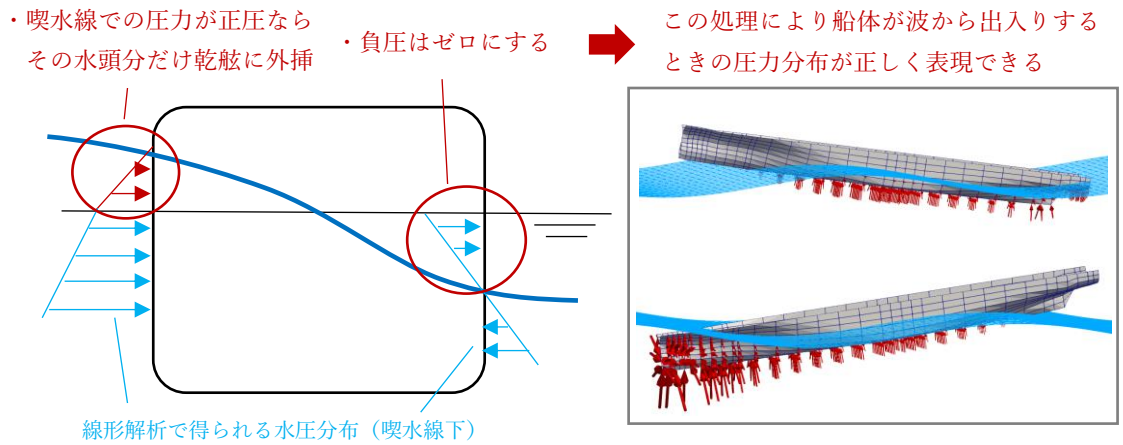


図 2.7（再） 喫水線近傍の圧力修正

④ 水圧の非線形項

流速と圧力の関係式であるベルヌーイの定理（$p/\rho = \partial\Phi/\partial t + v^2/2 + gz$）には、流速の二乗に比例する非線形項が存在する。この項は流速vが小さいと無視できる。こちらも$H_w/\lambda < 1/30$で無視できると考えてよい。

⑤ **スラミング**（水面衝撃）

スラミングは非線形性の強い現象の代表としてよく挙げられ、波高の非常に大きい荒天中で顕著になる。時間スケールの短い現象であるため、波浪による流体力とは異なる方程式から導かれる。しかし、スラミングが非線形である原因は主に上記③と同じで、水に接する部分の物体形状が急激に変化するところから来ている。スラミングはよく速度の二乗に比例する力といわれるが、それは水面下の物体形状が直線的に変化する場合であり、フレアスラミングなどに対しては近似的に成り立つ。一方、船底スラミングは空気巻き込みなどの影響があり、挙動はより複雑になる。

⑥ **ホイッピング**（弾性振動）

スラミングにより誘起される船体梁の弾性振動も、非線形現象と呼ばれる。しかし、ホイッピングそれ自体は、現象としては線形現象である。ただし、一般にホイッピングはスラミングという非線形現象に起因して生じることと、過渡応答現象なので周波数領域計算との親和性が悪いという理由で、普通は線形解析では扱われない。なお、波周波数と同じ周波数の弾性振動を**スプリンギング**と呼び、そちらは通常の線形解析でも比較的簡単に考慮できる。

⑦　**青波、海水打ち込み**

スラミング、ホイッピングと同様、荒天中に現れる非線形現象である。青波は規模によっては船体運動やハルガーダ断面力にも影響を及ぼすが、実質的に問題となるのはデッキの艤装品などへダメージである。青波は理論的に正しく推定することが困難で、粒子法などの高度な数値計算に依る必要がある。

以上に列挙した非線形現象うち、roll を除けば特に③の形状非線形が重要である。Roll の非線形性は線形解析でも普通（減滅係数 a, b の入力などで）と考慮するのに対し、形状非線形については線形解析では無視している（目をつぶっている）という点で、特に意識しておく必要がある。⑤スラミング⑥ホイッピング⑦青波も荒天中では重要な現象となるが、線形解析はそもそもそのような状況を扱うに適さない。

以下に、船体応答を線形近似できる目安についてまとめておく。

ポイント#36　船体応答を線形近似できる範囲の目安

・波浪の線形近似がよく成り立つ目安は波岨度（波高H_w/波長λ）が 1/30 以下

・船体運動の線形性が成り立つ範囲もおおむね同じ範囲とみてよいが、上下方向の船体形状変化が激しいと、**形状非線形**（船体にかかる波面形状が変化することによる非線形影響）が顕著になる場合がある

・Roll の減衰力に関しては低波高でも線形化が成り立たたず、非線形モデルが必須